Каждый участник получает комплект из 6 задач, при этом каждая из них случайным образом выбирается из 4-х вариантов. Представлены решения для одного из четырех вариантов, остальные решаются аналогично.

Первые 4 задачи подразумевают краткий числовой ответ. Если число в ответе имеет больше двух цифр после десятичной запятой, то это число требуется округлить до сотых. Задачи под номерами 5 и 6 требуют развернутого решения и точного (т.е. без округлений) ответа.

Each participant gets a set of 6 tasks, with each of them randomly selected from 4 versions. Solutions are presented for one of the four versions, the rest are solved similarly.

The first 4 tasks imply a short numerical answer. If the number in the answer has more than two digits after the decimal point, then this number must be rounded to 2 decimal digits. Tasks numbered 5 and 6 require a detailed solution and an precise (i.e. without rounding) answer.

7^{th} degree

Task 1.

1. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

   Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 99 пиратов, то доля капитана в таком случае составит 51 монета; а если же он выберет 77 пиратов, то его доля будет уже 29 монет. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 1000?

   Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

   Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 99 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 51 coins; and if he chooses 77 pirates, the captain's share will be 29 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 1000?

   Answer: 645

2. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

   Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 81 пирата, то доля капитана в таком случае составит 64 монет; а если же он выберет 99 пиратов, то его доля будет уже 19 монет. Известно, что число монет меньше 800. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 800?

   Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 81 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 64 coins; and if he chooses 99 pirates, the captain's share will be 19 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 800?

Answer: 712

3. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

   Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 143 пирата, то доля капитана в таком случае составит 61 монета; а если же он выберет 88 пиратов, то его доля будет уже 39 монет. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 1400?

   Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

   Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 143 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 61 coins; and if he chooses 88 pirates, the captain's share will be 39 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 1400?

Answer: 919

4. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

   Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 91 пират, то доля капитана в таком случае составит 87 монет; а если же он выберет 77 пиратов, то его доля будет уже 17 монет. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 950?

   Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

   Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 91 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 87 coins; and if he chooses 77 pirates, the captain's share will be 17 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 950?

Answer: 633

Solution (RUS). Пусть в первом случае награда каждого пирата равна t, а во втором - s. Тогда общая награда равна соответсвенно $99t+51$ и $77s+29$. По условию в обоих случаях награда одинаковая, больше 0 и меньше 1000. Имеем $99t+51=77s+29$.

Во-первых получаем, что $99t+51<1000$, то есть $99t<949$ или $t<\dfrac{949}{99}=9\dfrac{50}{99}$. Так как t - целое, то имеем $0<t\leq 9$. Во-вторых, упрощая равенство, получаем $99t+22=77s$, что можно сократить еще раз, поделив на 11. Получаем $9t+2=7s$.
Перебрав варианты t от 0 до 9, находим, что только при $t=6$ полученное число делится 7, чтобы справа могло получится выражение $7s$. Итого получается, что $t=6, s=8$, а само число равно 645.

Solution (ENG). Let each pirate's reward be t in the first case, and s in the second. Then the total reward is $99t+51$ and $77s+29$, respectively. According to the condition, in both cases the reward is the same, more than 0 and less than 1000. We have $99t+51=77s+29$.
First, we get that $99t+51<1000$, that is, $99t<949$ or $t<\frac{949}{99}=9\frac{50}{99}$. Since t is an integer, we have $0<t\leq 9$. Secondly, simplifying the equality, we get $99t+22=77s$, which can be reduced again by dividing by 11. We get $9t+2=7s$.
After going through the options t from 0 to 9, we find that only when $t=6$ the resulting number is divisible by 7, so that the expression $7s$ can be obtained on the right. In total, it turns out that $t=6, s=8$, and the number itself is 645.

Task 2.

1. Клетчатую таблицу размером 6×6 вырезали из листа бумаги и склеили у нее противоположные стороны. Какое максимально возможное количество коней можно расставить на такой доске, чтобы никакие два коня не били друг друга?

   A 6×6 checkered table was cut out of a sheet of paper and its opposite sides were glued together. What is the maximum possible number of chess knights that can be placed on such a board so that no two knights beat each other?

   Answer: 18

2. Клетчатую таблицу размером 8×8 вырезали из листа бумаги и склеили у нее противоположные стороны. Какое максимально возможное количество коней можно расставить на такой доске, чтобы никакие два коня не били друг друга?

   A 8×8 checkered table was cut out of a sheet of paper and its opposite sides were glued together. What is the maximum possible number of chess knights that can be placed on such a board so that no two knights beat each other?

   Answer: 32

3. Клетчатую таблицу размером 10×10 вырезали из листа бумаги и склеили у нее противоположные стороны. Какое максимально возможное количество коней можно расставить на

такой доске, чтобы никакие два коня не били друг друга?

A 10×10 checkered table was cut out of a sheet of paper and its opposite sides were glued together. What is the maximum possible number of chess knights that can be placed on such a board so that no two knights beat each other?

Answer: 50

4. Клетчатую таблицу размером 12×12 вырезали из листа бумаги и склеили у нее противоположные стороны. Какое максимально возможное количество коней можно расставить на такой доске, чтобы никакие два коня не били друг друга?

   A 12×12 checkered table was cut out of a sheet of paper and its opposite sides were glued together. What is the maximum possible number of chess knights that can be placed on such a board so that no two knights beat each other?

   Answer: 72

Solution (RUS). Заметим, что можно расставить коней на белых клетках, и никакие два коня друг друга не побьют. Докажем, что больше 32 коней расставить не получится. Действительно, каждый конь бьет ровно 8 клеток, и каждую клетку бьет не более 8 коней, поэтому k коней, не бьющих друг друга, занимают k клеток и бьют не более $\frac{8k}{8} = k$ клеток. Поэтому $k + k \leq 64 \implies k \leq 32$.

Заметьте, что для доски $m \times n$ ответ будет $\frac{[mn]}{2}$, где $[a]$ обозначает целую часть числа a.

Solution (ENG). Notice that it's possible to place the knights at all white squares so that they would not attack each other. Let's now show that it's not possible to place more than 32 knights. Since each knight attacks 8 squares (not less, not more), then k knights attack no more than $\frac{8k}{8} = k$ squares. Hence, $k + k \leq 64 \implies k \leq 32$.

Note that for for desk $m \times n$ the answer would be $\frac{[mn]}{2}$, where $[a]$ denotes whole part of number a.

Task 3.

1. В стране несколько городов, некоторые пары которых соединены дорогам. Известно, что всего 2025 дорог, и из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Какое максимальное количество дорог, никакие две из которых не выходят из одного города, гарантированно можно найти?

   There are several towns in a kingdom, some pairs of which are connected via roads. It is known that there are 2025 roads total and in any group of three roads you can choose two, which do not come from the same town. What is the largest number of roads are guaranteed to be found, no two of which come from the same towns?

   Answer: 810

2. В стране несколько городов, некоторые пары которых соединены дорогам. Известно, что всего 2000 дорог, и из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного

города. Какое максимальное количество дорог, никакие две из которых не выходят из одного города, гарантированно можно найти?

There are several towns in a kingdom, some pairs of which are connected via roads. It is known that there are 2000 roads total and in any group of three roads you can choose two, which do not come from the same town. What is the largest number of roads are guaranteed to be found, no two of which come from the same towns?

Answer: 800

3. В стране несколько городов, некоторые пары которых соединены дорогам. Известно, что всего 1915 дорог, и из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Какое максимальное количество дорог, никакие две из которых не выходят из одного города, гарантированно можно найти?

   There are several towns in a kingdom, some pairs of which are connected via roads. It is known that there are 1915 roads total and in any group of three roads you can choose two, which do not come from the same town. What is the largest number of roads are guaranteed to be found, no two of which come from the same towns?

   Answer: 766

4. В стране несколько городов, некоторые пары которых соединены дорогам. Известно, что всего 1875 дорог, и из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Какое максимальное количество дорог, никакие две из которых не выходят из одного города, гарантированно можно найти?

   There are several towns in a kingdom, some pairs of which are connected via roads. It is known that there are 1875 roads total and in any group of three roads you can choose two, which do not come from the same town. What is the largest number of roads are guaranteed to be found, no two of which come from the same towns?

   Answer: 750

Solution (RUS). Заметим, что из любого города выходят или 0, или одна, или две дороги. Значит, все города распадаются на одиночно стоящие, цепи и циклы. Также заметим, что треугольных циклов нет. Теперь отметим, что в каждой цепи можно взять не менее половины дорог, а в каждом цикле - не менее $2/5$ дорог, поскольку если в цикле k дорог, то при четном k мы берем $k/2$ дорог, а при нечетном k – $(k-1)/2$, что не меньше $\frac{2}{5}k$ при $k \geq 5$. Пример дается циклами длины 5.

Solution (ENG). Note that either 0, or one, or two roads come out of any city. So all cities break up into singles, chains, and cycles. Also note that there are no triangular cycles. Now note that in each chain we can take at least half of the roads, and in each cycle we can take at least $2/5$ of the roads, because if a cycle has k roads, then for even k we take $k/2$ roads, and for odd k we take $(k-1)/2$, which is not less than $\frac{2}{5}k$ at $k \geq 5$. An example can be given by cycles of length 5.

Task 4.

1. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $n^7 - n$ для любого натурального n.

   Find greatest common factor for all numbers of type $n^7 - n$ for any positive integer n.

   Answer: 42

2. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $n^{13} - n$ для любого натурального n.

   Find greatest common factor for all numbers of type $n^{13} - n$ for any positive integer n.

   Answer: 2730

3. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $n^{19} - n$ для любого натурального n.

   Find greatest common factor for all numbers of type $n^{19} - n$ for any positive integer n.

   Answer: 798

4. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $n^{25} - n$ для любого натурального n.

   Find greatest common factor for all numbers of type $n^{25} - n$ for any positive integer n.

   Answer: 2730

Solution (RUS). Заметим, что искомый НОД делит число $2^7 - 2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$. Также НОД не делится на 9, т.к. на 9 не делится число $3^7 - 3$. Поэтому нод не больше $2 \cdot 3 \cdot 7$. Однако число $n^7 - n$ делится и на 2, и на 3, и на 7 по малой теореме Ферма. Таким образом, наибольший общий делитель равен 42.

В остальных задачах принцип решения аналогичный: раскладывыем число $2^n - 2$ на множители, затем с помощью проверки делимости числа $3^n - 3$ отбрасываем 3^2 (и все остальные степени, больше первой, если они есть, например 2^2), а остальные делители проверяем с помощью малой теоремы Ферма и свойствами арифметики по модулю.

Solution (ENG). Note that the desired greatest common factor divides the number $2^7 - 2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$. Also, the greatest common factor is not divisible by 9, because the number $3^7 - 3$ is not divisible by 9. Therefore, the greatest common factor is no more than $2 \cdot 3 \cdot 7$. However, the number $n^7 - n$ is divisible by 2, 3, and 7 by Fermat's little theorem. Thus, the greatest common factor is 42.

For other tasks the principle of solution is the same: we factor the number $2^n - 2$, then we remove the divisors like 3^2 (and other divisors with degree higher than 1, if any, for example 2^2) with checking of $3^n - 3$. Other divisors are checked with Fermat's little theorem and properties of modular arithmetics.

Task 5.

1. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 2022, образуя одно огромное число: 1234567891011...20212022. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

   On a tape all positive integers from 1 to 2022 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...20212022. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3, then Ivan wins, otherwise, Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

2. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 1999, образуя одно огромное число: 1234567891011...19981999. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

   On a tape all positive integers from 1 to 1999 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...19981999. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3, then Ivan wins, otherwise, Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

3. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 2077, образуя одно огромное число: 1234567891011...20762077. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

   On a tape all positive integers from 1 to 2077 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...20762077. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3, then Ivan wins, otherwise, Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

4. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 2007, образуя одно огромное число: 1234567891011...20062007. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

   On a tape all positive integers from 1 to 2007 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...20062007. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3, then Ivan wins, otherwise, Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

Solution (RUS). Стратегия для Пети: пока есть цифры, делящиеся на 3, в свой ход Петя вычеркивает такую цифру. Далее, если ещё потребуется делать ходы, Петя вычеркивает цифры произвольно.

Заметим, что если Пете удастся добиться вычеркивания всех цифр, делящихся на 3 (такие мы далее будем называть хорошими), то финальное однозначное число не будет делиться на 3, а Ваня, соответственно, проиграет. Покажем, что Пете хватит ходов для этого. Сначала выясним общее число ходов (на двоих): это в точности количество цифр изначального числа.

Стратегия для Пети: пока есть цифры, делящиеся на 3, в свой ход Петя вычёркивает такую цифру. Далее, если ещё потребуется делать ходы, Петя вычёркивает цифры произвольно.

Заметим, что если Пете удастся добиться вычёркивания всех цифр, делящихся на 3 (такие мы далее будем называть хорошими), то финальное однозначное число не будет делиться на 3, а Ваня, соответственно, проиграет. Покажем, что Пете хватит ходов для этого.

Сначала выясним общее количество ходов (на двоих): это в точности количество цифр изначального числа. Это количество составлено из цифр однозначных чисел (которых 9 в записи), двузначных (которых 90), трёхзначных (их 900), и четырёхзначных (их 2022 - 999 = 1023). То есть всего количество цифр в записи изначального длинного числа (будем его называть шаблоном) равно $9+2\cdot 90+3\cdot 900+4\cdot 1023 = 9+180+2700+4092 = 6981$.

Количество ходов же совпадает с количеством вычеркнутых чисел в конце, а их 6980 (так как осталось одно).

Покажем, что хороших цифр в записи шаблона менее половины от 6980 (то есть менее $6980/2 = 3490$). Для этого отдельно посчитаем количество таких цифр, которые получаются из однозначных чисел записи, из двузначных и так далее.

Заметим, что всего в записи чисел от 1 до 9 количество хороших цифр равно 3.

Среди двузначных чисел в записи шаблона количество хороших цифр на первой позиции (соответствующего числа) равно 3×10, так как на первой позиции, допустимы лишь хорошие цифры 3, 6 и 9 - всего три варианта. Для каждой из этих цифр встретятся все 10 вариантов второй цифры, то есть в разряде единиц. Аналогично вычисляем, что количество хороших цифр на вторых позициях двухзначных чисел в шаблоне равно 4×9. Итого, хороших цифр, полученных из двузначных чисел в записи шаблона, всего $3 \cdot 10 + 4 \cdot 9 = 30 + 36 = 66$.

Аналогично из трёхзначных чисел в шаблоне получаются $3 \cdot 100 + 4 \cdot 90 + 4 \cdot 90 = 300 + 360 + 360 = 1020$ хороших цифр.

Для четырёхзначных чисел также разделим подсчёт на две части: для чисел от 1000 до 1999 и для чисел от 2000 до 2022. В первой подгруппе во всех числах первая цифра не является хорошей, а количество хороших цифр среди этих тысячи чисел равно $4\cdot 100\times 3 = 1200$.

Во вторую подгруппу (от 2000 до 2023) попали 23 числа. Вручную проверяем, что количество хороших цифр в разряде тысяч равно 0 (все двойки), а в разряде сотен - равно 23 (все нули). В разряде десятков хороших цифр 10, а в разряде единиц 9. Итого из $4 \times 23 = 92$ цифр этих 23х чисел $23 + 10 + 9 = 42$ хороших.

Остаётся отметить, что в каждой из рассмотренных групп количество хороших цифр меньше половины:

в однозначных 3 из 9, в двузначных 66 из 180, в трёхзначных 1020 из 2700, в четырёхзначных в первой подгруппе 1200 из 4000, во второй подгруппе 42 из 92.

Таки образом, хороших цифр в шаблоне меньше количества ходов Пети, то есть он сможет вычеркнуть их все (кроме тех, которые вычеркнет Ваня) и гарантировать себе победу.

Solution (ENG). Strategy for Peter: as long as there are digits that divide by 3, on his turn Peter crosses out such a digit. Then, if Peter needs to make more moves, he crosses out the digits randomly.

Note that if Peter manages to cross out all digits divisible by 3 (we'll call such digits good), then the final single-digit number will not divide by 3, and Ivan, correspondingly, will lose. Let's show that Peter has enough moves for that.

First find the total number of moves (for two): this is exactly the number of digits of the initial number. It is the number of digits of one-digit numbers (of which there are 9 in the entry), two-digit numbers (of which there are 90), three-digit numbers (of which there are 900), and four-digit numbers (of which 2022 - 999 = 1023). So, the total number of digits in the original record of a long number (we will call it a pattern) is $9+2\cdot 90+3\cdot 900+4\cdot 1023 = 9+180+2700+4092 = 6981$.

The number of moves coincides with the number of crossed out numbers at the end, and they are 6980 (since there is one left).

Let us show that the good numbers in the pattern entry are less than half of 6980 (that is, less than $6980/2 = 3490$). To do this, we separately count the number of such digits that are obtained from single-digit numbers in the record, from two-digit numbers, and so on.

Note that the total number of good digits in the record of numbers from 1 to 9 is 3.

Among two-digit numbers in the pattern, the number of good digits in the first position (the corresponding number) is 3×10 (as in the first position, only good numbers 3, 6 and 9 are allowed - a total of three options. For each of these digits will meet all 10 cases of the second digit. Similarly, calculate that the number of good digits on the second positions of two-digit numbers in the pattern is 4×9. So $3 * 10 + 4 * 9 = 30 + 36 = 66$ good digits obtained from the two-digit numbers in the pattern.

Similarly, the three-digit numbers in the template obtained $3 * 100 + 4 * 90 + 4 * 90 = 300 + 360 + 360 = 1020$ good numbers.

For four-digit numbers we will also divide the calculation into two parts: for numbers from 1000 to 1999 and for numbers from 2000 to 2022. In the first subgroup, the first digit is not good, and the number of good digits among these thousand numbers is $4*100\times3 = 1200$.

In the second subgroup (from 2000 to 2023) only 23 numbers. Manually check that the number of good digits in the thousands division is 0 (all two), and in the hundreds division is 23 (all zeros). The number of good digits in the tens division is 10, and in the units division - 9. The total of $4 \times 23 = 92$ digits of these 23x numbers is $23 + 10 + 9 = 42$ good.

And we have 2331 good numbers and it is less than half. So Peter can cross them all out (except for those that Ivan crosses out) and guarantee victory.

Task 6.

1. Алиса и Боб играют в игру. Игровое поле представляет из себя клетчатую полоску размером 1×2022. Игроки по очереди (начинает Алиса) выписывают в пустую клетку любую из букв О и Г. Побеждает тот, после чьего хода в трех соседних клетках появятся буквы ОГО. Если все клетки заполнены, а слова ОГО нет, игра заканчивается вничью. Каков будет исход при правильной игре обоих соперников?

   Alice and Bob play a game. The gaming field is a checked line of size 1×2022. Players one by one write any of the letters W or O (the first to write is Alice). The person after which turn there would be a work WOW on the desk wins. If all cells are filled without WOW word, the players draw. How the game would end with a optimal play of both players?

2. Алиса и Боб играют в игру. Игровое поле представляет из себя клетчатую полоску размером 1×1111. Игроки по очереди (начинает Алиса) выписывают в пустую клетку любую из букв О и Г. Побеждает тот, после чьего хода в трех соседних клетках появятся буквы ОГО. Если все клетки заполнены, а слова ОГО нет, игра заканчивается вничью. Каков будет исход при правильной игре обоих соперников?

   Alice and Bob play a game. The gaming field is a checked line of size 1×1111. Players one by one write any of the letters W or O (the first to write is Alice). The person after which turn there would be a work WOW on the desk wins. If all cells are filled without WOW word, the players draw. How the game would end with a optimal play of both players?

3. Алиса и Боб играют в игру. Игровое поле представляет из себя клетчатую полоску размером 1×2048. Игроки по очереди (начинает Алиса) выписывают в пустую клетку любую из букв О и Г. Побеждает тот, после чьего хода в трех соседних клетках появятся буквы ОГО. Если все клетки заполнены, а слова ОГО нет, игра заканчивается вничью. Каков будет исход при

правильной игре обоих соперников?

Alice and Bob play a game. The gaming field is a checked line of size 1×2048. Players one by one write any of the letters W or O (the first to write is Alice). The person after which turn there would be a work WOW on the desk wins. If all cells are filled without WOW word, the players draw. How the game would end with a optimal play of both players?

4. Алиса и Боб играют в игру. Игровое поле представляет из себя клетчатую полоску размером 1×777. Игроки по очереди (начинает Алиса) выписывают в пустую клетку любую из букв О и Г. Побеждает тот, после чьего хода в трех соседних клетках появятся буквы ОГО. Если все клетки заполнены, а слова ОГО нет, игра заканчивается вничью. Каков будет исход при правильной игре обоих соперников?

   Alice and Bob play a game. The gaming field is a checked line of size 1×777. Players one by one write any of the letters W or O (the first to write is Alice). The person after which turn there would be a work WOW on the desk wins. If all cells are filled without WOW word, the players draw. How the game would end with a optimal play of both players?

Solution (RUS). Докажем, что Боб выиграет. Для этого ему нужно создать комбинацию $O[][]O$ ([] обозначает пустую клетку). Ясно, что не позднее чем за 2 хода он сможет это сделать, расположив сначала букву О на достаточно большом расстоянии от клетки Алисы и края доски, а вторым ходом — расположив букву О на расстоянии 2 клетки от своей первой буквы О (с одной из сторон, где он сможет это сделать, такая сторона всегда найдется). После этого момента он будет ждать, когда Алиса сделает свой ход в одну из клеток между его буквами О – тогда в любом случае можно будет дополнить до слова ОГО и победить. Алиса вынуждена будет это сделать, поскольку после любого ее хода на доске останется нечетное количество пустых клеток, а значит, найдется клетка, справа и слева от которой либо нет букв, либо есть обе буквы. Боб может поставить Г в эту клетку и не проиграет.

Для других вариантов, все зависит от четности количества клеток: если их четное количество, то выигрывает Боб. В противном случае – Алиса.

Solution (ENG). Let's prove that Bob would win. For that he should create combination $O[][]O$ ([] denotes empty cell). It's clear that no later than after 2 moves he would be able to do that: first he could put letter O far away from Alice's letter and borders, then he could put another letter O on one of the sides. After that he would wait until Alice would make a move between his letters O – then it would be always possible to complete this combination to WOW and win. This situation would happen since after any her move there would be odd amount of empty cells, hence there would be a cell which is surrounded by two empty cells or by two filled cells. In both situations there is a possibilty to choose the letter and don't lose.

For other variants, it depends on the parity of cells amount: if there are even amount of cells, then Bob wins. Otherwise – Alice wins.