7^{th} degree

Task 1. Катя хочет покрасить стены своей шестиугольной комнаты в голубой, желтый, зеленый, красный, синий и оранжевый цвета (каждую стену в свой цвет), причем голубая стена должна соседствовать с желтой, а зеленая не должна соседствовать с синей. Сколько существует различных способов покрасить стены комнаты с соблюдением этих правил? Покраски, совпадающие друг с другом при повороте комнаты, считаются одинаковыми.

Kate wants to paint the walls of her hexagonal room in light-blue, yellow, green, red, blue and orange (each wall in a different color), where the light-blue wall should be adjacent to the yellow one, and the green wall should not be adjacent to the blue one. How many different ways are there to paint the walls of the room while following these rules? Paintings that coincide with each other when the room is rotated are considered to be the same.

Solution (RUS). Заметим, что каждую покраску можно отразить (раскрасить стены в обратном порядке), а значит, все покраски можно разбить на пары. Поэтому достаточно рассмотреть только одну покраску из каждой пары, а значит, будем считать, что желтая стена справа от голубой.

Пронумеруем стены комнаты числами от 1 до 6, поворачиваясь по часовой стрелке. Поскольку покраски, совпадающие при повороте, считаются одинаковыми, будем считать, что стена 1 покрашена в голубой цвет, а стена 2 – в желтый. Остались четыре непокрашенные стены и четыре цвета, поэтому общее количество способов их покрасить равно $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Из них нам не подходят варианты, в которых синяя и зеленая стены соседствуют:

$G, B, \square, \square;$
$B, G, \square, \square;$
$\square, G, B, \square;$
$\square, B, G, \square;$
$\square, \square, G, B;$
$\square, \square, B, G.$

Буквами G, B здесь обозначены соответственно зеленый и синий цвета, а символом $\square$ – стены для покраски в красный и оранжевый цвета. Заметим, что для каждого из шести перечисленных вариантов существуют по два варианта покраски в красный и оранжевый цвета – значит, неподходящих вариантов ровно $6 \cdot 2 = 12$, а остальные 12 из 24 подходят.

Осталось вспомнить, что все «правильные» покраски можно разбить на симметричные пары, а значит, всего их $12 \cdot 2 = 24$.

Solution (ENG). Note that all ways to paint the walls can be divided into pairs symmetrical to each other with respect to the axis of symmetry of the hexagon (if you look at the room from above). Therefore, it's enough to consider only one painting from each pair, which means that we can assume that yellow wall is to the right of the blue one.

Let's enumbeate the walls of the room with numbers from 1 to 6, turning clockwise. Since the ways to paint that match during the rotation are assumed to be the same, we will assume that wall 1 is blue and wall 2 is yellow. There are four unpainted walls and four colors left, so the total number of ways to paint them is $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Of these we do not accept options in which blue and green walls are adjacent:

$G, B, \square, \square;$
$B, G, \square, \square;$
$\square, G, B, \square;$
$\square, B, G, \square;$
$\square, \square, G, B;$
$\square, \square, B, G.$

The letters G, B here represent green and blue, respectively, and the symbol $\square$ denotes the walls to be painted in red and orange. Note that for each of the six options listed, there are two color options for red and orange, which means that there are exactly $6 \cdot 2 = 12$ of unsuitable options, and the remaining 12 out of 24 are suitable for us.

It remains to remember that all correct ways to paint the walls can be divided into symmetrical pairs, which means that there are $12 \cdot 2 = 24$ ways in total.

Task 2. Рассмотрим следующий алгоритм. На каждом шаге мы берем текущее натуральное число, раскладываем его в сумму каких-то двух натуральных слагаемых (эти слагаемые на каждом шаге мы можем выбирать как угодно), а затем перемножаем эти два слагаемых и получаем новое число. Назовем число n *волшебным*, если, запустив алгоритм с числа, равного сумме цифр десятичной записи n, мы в какой-то момент времени можем получить число n.

Например, число 35 *волшебное, поскольку сумма его цифр равна* 8, *и алгоритм работает так:*

$$8 = 6 + 2 \to 6 \cdot 2 = 12 = 7 + 5 \to 7 \cdot 5 = 35$$

Является ли волшебным число 2023?

Consider the following algorithm. At every its step we represent the current positive integer as a sum of two positive integers chosen by our will, then we multiply these two numbers and get a new number. Lets call a number n *magical* if we can get n by launching the algorithm from the sum of decimal digits of n.

For example, the number 35 *is magical, since the sum of its digits is* 8, *and the algorithm works as follows:*

$$8 = 6 + 2 \to 6 \cdot 2 = 12 = 7 + 5 \to 7 \cdot 5 = 35$$

Is the number 2023 magical?

Solution (RUS). Заметим, что $2023 = 17 \cdot 119$, поэтому в ходе работы нашего алгоритма нам нужно получить число $17 + 119 = 136$. Удобно для этого запустить процесс в обратную сторону: разложить число на два множителя и затем вычислить их сумму. Получим следующий процесс:

$$2023 = 17 \cdot 119 \to 17 + 119 = 136 = 8 \cdot 17 \to 8 + 17 = 25 = 5 \cdot 5 \to 5 + 5 = 10$$

Таким образом, нам достаточно, стартуя с числа $2 + 0 + 2 + 3 = 7$, получить число 10. Это совсем легко:

$$7 = 4 + 3 \to 4 \cdot 3 = 12 = 11 + 1 \to 11 \cdot 1 = 11 = 10 + 1 \to 10 \cdot 1 = 10$$

Получив число 10 и развернув в обратную сторону процесс, описаный выше, получим алгоритм, приводящий нас к числу 2023. Значит, оно волшебное.

Solution (ENG). Note that $2023 = 17 \cdot 119$, so during the work of our algorithm we need to get the number $17 + 119 = 136$. It is convenient to run the algorithm in the opposite direction: decompose the number into two factors and then calculate their sum. We get the following:

$$2023 = 17 \cdot 119 \to 17 + 119 = 136 = 8 \cdot 17 \to 8 + 17 = 25 = 5 \cdot 5 \to 5 + 5 = 10$$

Thus, it is enough for us to get the number 10 starting from the number $2 + 0 + 2 + 3 = 7$. It's quite easy:

$$7 = 4 + 3 \to 4 \cdot 3 = 12 = 11 + 1 \to 11 \cdot 1 = 11 = 10 + 1 \to 10 \cdot 1 = 10$$

Having received the number 10 and reversed the process described above, we get an algorithm that leads us to the number 2023. So it's magical.

Task 3. По кругу расставлены 2024 контейнера, в каждом из которых изначально находится по одному шарику. Робот умеет брать два любых шарика и перекладывать их в соседние с ними контейнеры, но при этом один шарик должен быть переложен в соседний контейнер справа, а другой – в соседний контейнер слева.

Например, можно взять шарики из контейнеров с порядковыми номерами 134 *и* 960 *и переложить из них шарики в контейнеры с номерами* 135 *и* 959 *соответственно.*

Можно ли написать для робота такую программу, что в результате ее работы

a) останется 8 контейнеров, в каждом из которых по 253 шарика;

b) останется 253 контейнера, в каждом из которых по 8 шариков?

2024 containers are arranged in a circle, each of them initially contains one ball. Robot can take any two balls and transfer them to the containers adjacent to them, but in this case one ball must be transferred to the adjacent container on the right, and the other – to the adjacent container on the left.

For example, you can take balls from containers with numbers 134 *and* 960 *and put them into containers with numbers* 135 *and* 959, *respectively.*

Is it possible to program the robot such that as a result of its work

a) 8 containers will remain, each containing 253 balls;

b) 253 containers left, each with 8 balls?

Solution (RUS). a) Покажем, что это возможно. Пронумеруем контейнеры числами от 1 до 2024. Сначала переложим все шарики из контейнеров с номерами от 1 до 252 в контейнер 253, одновременно перекладывая шарики из контейнеров с номерами от 2024 до 1773 в контейнер 1772. Аналогично поступим с контейнерами с номерами от 254 до 505 и контейнерами с номерами от 1771 до 1520, номерами от 507 до 758 и номерами от 1518 до 1267, и наконец, с номерами от 760 до 1011 и номерами от 1265 до 1014. В итоге мы получим требуемое распределение шариков.

b) Докажем, что такое невозможно. Проследим, как меняется сумма номеров контейнеров, умноженных на количество шаров в них, при одном действии робота (например, изначально эта сумма равна $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2024$, а после того, как робот «поработает» с контейнерами 1 и 3, эта сумма будет равна $0 + 2 \cdot 3 + 0 + 4 + \cdots + 2024$). Если не происходит перекладывания шарика из контейнера 1 в контейнер 2024 (или наоборот), эта сумма сохраняется, в противном случае она изменяется на 2024. Значит, в результате всех перемещений шариков остаток суммы номеров контейнеров, умноженных на количество шаров в них, при делении на 2024 не изменился. В начальный момент времени этот остаток был равен $1 + 2 + \cdots + 2024 = 2025 \cdot 1012 \equiv 1012 \pmod{2024}$, а в конечный момент времени – остатку суммы номеров контейнеров, содержащих шарики, умноженной на 8. Однако первый остаток не кратен 8, а второй кратен – противоречие. Значит, искомого алгоритма не существует.

Solution (ENG). a) Let's show that's possible. We'll numerate the containers from 1 to 2024. First, let's «shift» all the balls from containers with numbers from 1 to 252 to the container 253, at the same time shifting balls from containers with numbers from 2024 to 1773 into the container 1772. We will act similarly with containers numbered from 254 to 505 and containers numbered from 1771 to 1520, from 507 to 758 and from 1518 to 1267, and finally, from 760 to 1011 and from 1265 to 1014. As a result, we get the required placing of balls.

b) Let's prove that it's impossible. We will look at the sum of containers' numbers changing at one action of the robot. If the ball is not transferred from a container of 1 to a container 2024 (or vice versa), the sum of numbers of the two containers remains the same, otherwise it changes (increases or decreases) by 2024. This means that as a result of all the movements of the balls, the rest of the amount of containers' numbers has not changed modulo 2024. At the robot started its work, the residue was $1 + 2 + \cdots + 2024 = 2025 \cdot 1012 \equiv 1012 \pmod{2024}$, and at the end of its work the residue must be equal to the remainder of the sum of containers' (with balls) numbers multiplied by 8. However, the first residue is not divisible by 8, and that gives us a contradiction. Thus, the desired algorithm can not exist.

Task 4. *(задача предоставлена партнером Олимпиады – компанией «Тинькофф Образование»)* Аналитик приехал на конференцию. Там он узнал, что среди 190 других участников конференции 50 всегда говорят правду, 100 всегда лгут, а 40 могут говорить что угодно. Все, кроме аналитика, знают всё про всех остальных: кто всегда говорит правду, кто всегда лжёт, а кто может говорить что угодно.

Докажите, что, пообщавшись со всеми участниками конференции, аналитик гарантированно сможет выяснить, кто кем является.

The analyst came to a conference. There he learned that among 190 others participants 50 always tell the truth, 100 always lie, and 40 can say either truth or lie. Everyone except the analyst knows everything about everyone else: who always tells the truth, who always lies, and who can say anything.

Prove that after talking with all the participants of the conference the analyst is guaranteed to find out who is who.

Solution (RUS). Зададим каждому из людей вопрос про каждого из остальных. Заметим, что люди, всегда говорящие правду, назовут ровно 100 других людей лжецами. А вот люди, которые всегда лгут, не могут назвать каких-то 100 других людей лжецами, потому что людей, говорящих правду и всё что угодно, суммарно меньше 100.

Рассмотрим только людей, которые про 100 каких-то других людей сказали, что те всегда лгут. Среди них должны найтись какие-то 50 людей, которые друг про друга сказали, что они говорят правду. Заметим, что в таком множестве могут быть только люди, которые всегда говорят правду. Действительно, лжецов там быть не может, так как мы их «отфильтровали» ещё на первом шаге. Если среди этих 50 людей встречаются всегда говорящие правду и говорящие что угодно, то люди, говорящие правду, сказали бы про остальных, что они говорят что угодно. Также все эти 50 человек не могут говорить что угодно, так как говорящих что угодно у нас всего 40.

Таким образом, мы найдём людей, говорящих правду, а дальше по их ответам узнаем всё про всех остальных.

Solution (ENG). Let's ask each of the people a question about each of the others. Note that people who always tell the truth will call exactly 100 of other people liars. And the liars can't call some 100 of other people liars, because there are less than 100 of non-liars.

Consider only people who said about the 100 of some other people that they always lie. Among them there should be some 50 people who said about each other that they are telling the truth. Note that in such a set there can only be people who always tell the truth. Indeed, there cannot be liars, since we «filtered out» them at the first step. If among these 50 people there are always non-liars, then people who tell the truth would say about the rest that they say whatever they want. Also, all these 50 people can't say anything, because we only have 40 of people saying anything.

In this way, we will find people who speak the truth, and then we will learn everything about everyone else from their answers.

Task 5. Андрей загадал натуральное число k, а Виктор каким-то образом выписал на доску все натуральные числа, не содержащие в десятичной записи цифру 0. Затем Андрей огласил значение k, и Виктор вместо каждого записанного на доске числа n записал разность между суммой цифр числа n и суммой цифр числа kn (и там, и там говорится о сумме цифр десятичной записи числа).

Докажите, что теперь на доске записано бесконечно много нулей.

Andrew thought of a positive integer k, and Victor somehow wrote down on the board all positive integers that do not contain the digit 0 in their decimal notation. Then Andrew announced the value of k, and instead of each number n written on the board, Victor wrote down the difference between the sum of decimal digits of the number n and the sum of decimal digits of the number kn.

Prove that now there are infinitely many zeros written on the board.

Solution (RUS). Пусть в десятичной записи числа k было x цифр. Тогда среди чисел, изначально записанных на доске, достаточно рассмотреть числа вида $999\ldots9$, записываемые девятками, количество которых не меньше x.

Рассмотрим одно такое число, записываемое с помощью y девяток: $n = 999\ldots9 = 10^y - 1$. Сумма цифр такого числа равна $9y$, при этом $kn = (10^y - 1)k = 10^y \cdot k - k$ – десятичная запись такого числа начинается с записи числа k (если k не кратно 10, то последняя цифра уменьшена на 1; если k кратно 10, то можно отбросить нули, на которые оно оканчивается – они не влияют на сумму цифр числа kn), затем следует $y - x$ девяток, а затем – цифры, дополняющие каждую из первых x цифр до 9.

Верность этого утверждения может быть продемонстрирована вычитанием из $10^y \cdot k$ числа k «в столбик». После этого становится очевидным, что суммы цифр чисел n и kn равны, и разность этих сумм равна 0. Поскольку утверждение верно для любого $y \geq x$ и количество таких y бесконечно, делаем вывод, что на доске окажется бесконечное количество нулей, что и требовалось доказать.

Например, если $k = 372$, $y = 5 \geq 3$ (количество цифр десятичной записи k), то $n = 99999$ и $kn = 372 \cdot 99999 = 372 \cdot (10^5 - 1) = 37199628$ с той же суммой цифр, что у числа 99999. Это же верно для любого $y \geq 3$.

Solution (ENG). Let there be x digits in the decimal representation of the number k. Then, among the numbers initially written on the board, it's enough to consider numbers of the form $999\ldots9$ (at least x digits, all of them are equal to 9).

Consider one such number written using y digits «9»: $n = 999\ldots9 = 10^y - 1$. The sum of the digits of such a number is $9y$, while $kn = (10^y - 1)k = 10^y \cdot k - k$ – the decimal notation of such a number begins with the number k (if k is not a multiple of 10, then the last digit is reduced by 1; if k is a multiple of 10, then you can discard the zeros it ends in since they don't affect the sum of digits of kn), followed by $y - x$ digits «9», and then – by digits completing each of the first x digits up to 9.

The correctness of this statement can be demonstrated by subtracting the number k «in a column» from $10^y \cdot k$. After that, it becomes obvious that the sums of the digits of the numbers n and kn are equal, and the difference between these sums is equal to 0. Since the assertion is true for any $y \geq x$ and the number of such y is infinite, we conclude that there will be an infinite number of zeros on the board, which was required to be proved.

For example, if $k = 372$, $y = 5 \geq 3$ (the number of digits in decimal notation k), then $n = 99999$ and $kn = 372 \cdot 99999 = 372 \cdot (10^5 - 1) = 37199628$ with the same sum of digits as 99999. The same is true for any $y \geq 3$.