8-9 degree

Task 1.

1. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $3N+2$ конфеты. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с двух конфет и успел произнести заклинание 14 раз?

   Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $3N+2$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with two candies and managed to cast the spell 14 times?

   Answer: 14348906

2. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $5N+4$ конфеты. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с четырех конфет и успел произнести заклинание 9 раз?

   Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $5N+4$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with four candies and managed to cast the spell 9 times?

   Answer: 9765624

3. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $4N+3$ конфеты. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с трех конфет и успел произнести заклинание 11 раз?

   Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $4N+3$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with three candies and managed to cast the spell 11 times?

   Answer: 16777215

4. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $6N+5$ конфет. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с пяти конфет и успел произнести заклинание 8 раз?

   Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $6N+5$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with five candies and managed to cast the spell 8 times?

   Answer: 10077695

Solution (RUS). См. решение задачи №3 для 7 класса.

Solution (ENG). See solution of the task 3 for the 7th degree.

Task 2.

1. В каждую клетку таблицы 100×100 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 100, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 200, и так далее – в k-ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k, 2k, 3k, \ldots, 100k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

   Each cell of the table 100×100 has a number: the first row has all positive integers from 1 to 100 in ascending order, the second row has all the even numbers from 2 to 200, and further on – k-th line has numbers $k, 2k, 3k, \ldots, 100k$ in ascending order. Let's consider the diagonal from the bottom left corner to the upper right. Find the largest number it contains.

   Answer: 2550

2. В каждую клетку таблицы 200×200 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 200, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 400, и так далее – в k-ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k, 2k, 3k, \ldots, 200k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

   Each cell of the table 200×200 has a number: the first row has all positive integers from 1 to 200 in ascending order, the second row has all the even numbers from 2 to 400, and further on – k-th line has numbers $k, 2k, 3k, \ldots, 200k$ in ascending order. Let's consider the diagonal from the bottom left corner to the upper right. Find the largest number it contains.

   Answer: 10100

3. В каждую клетку таблицы 150×150 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 150, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 300, и так далее – в k-ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k, 2k, 3k, \ldots, 150k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

   Each cell of the table 150×150 has a number: the first row has all positive integers from 1 to 150 in ascending order, the second row has all the even numbers from 2 to 300, and further on – k-th line has numbers $k, 2k, 3k, \ldots, 150k$ in ascending order. Let's consider the diagonal from the bottom left corner to the upper right. Find the largest number it contains.

Answer: 5700

4. В каждую клетку таблицы 250×250 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 250, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 500, и так далее – в k-ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k, 2k, 3k, \ldots, 250k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

   Each cell of the table 250×250 has a number: the first row has all positive integers from 1 to 250 in ascending order, the second row has all the even numbers from 2 to 500, and further on – k-th line has numbers $k, 2k, 3k, \ldots, 250k$ in ascending order. Let's consider the diagonal from the bottom left corner to the upper right. Find the largest number it contains.

Answer: 15750

Solution (RUS). *(решение варианта 1, остальные решаются аналогично)*
В клетках указанной диагонали записаны числа 100×1, 99×2, 98×3, $\ldots$,1×1000. То есть в общем виде - числа вида $k(101-k)$ при целых k от 1 до 100. Это уравнение стандартной параболы ветвями вниз, с корнями в точках 0 и 101. Абсцисса её вершины равна $101/2$. Левее неё, т.е. на интервале $(-\infty, 101/2]$ эта функция возрастает, т.е. максимальное её значение при $k = [101/2] = 50$ и равно $50(101 - 50) = 50 \cdot 51 = 2550$. Правее же вершины (т.е. на $[101/2, +\infty)$ эта функция убывает и аналогично её максимум достигается при k = 51 и равен также 2550. Таким образом, максимальное число на диагонали равно 2550.

Solution (ENG). *(solution of version 1, the others are solved similarly)*
The numbers are written in the cells of the specified diagonal 100×1, 99×2, 98×3, ...,1×1000. That is, in general, numbers of the form $k(101-k)$ for integers k from 1 to 100. This is the equation of a standard parabola with branches downwards, with roots at points 0 and 101. The abscissa of its vertex is $101/2$. To the left of it, i.e. on the interval $(-\infty, 101/2]$ this function increases, i.e. its maximum value at $k = [101/2] = 50$ and is equal to $50(101 - 50) = 50 \cdot 51 = 2550$. To the right of the vertex (i.e. at $[101/2, +\infty)$, this function decreases and similarly its maximum is reached when k = 51 and is also equal to 2550. Thus, the maximum number on the diagonal is 2550.

Task 3.

1. Треугольник AOB – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB. Точки C и D расположены на отрезках AO, OB соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику COD, причем точки A, C_1, D_1 лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 12, CD = 7$.

   Triangle AOB is an isosceles right triangle with hypotenuse AB. The points C and D are located on the segments AO, OB, respectively, so that $CD \parallel AB$. $\triangle C_1OD_1$ constructed being equal to triangle COD, moreover, points A, C_1, D_1 lie on one straight line in the specified order.
   Calculate the area of $\triangle AD_1B$ while $AB = 12, CD = 7$.

Answer: 23.75; 63.05

2. Треугольник AOB – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB. Точки C и D расположены на отрезках AO, OB соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику COD, причем точки A, C_1, D_1 лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 10, CD = 9$.

   Triangle AOB is an isosceles right triangle with hypotenuse AB. The points C and D are located on the segments AO, OB, respectively, so that $CD \parallel AB$. $\triangle C_1OD_1$ constructed being equal to triangle COD, moreover, points A, C_1, D_1 lie on one straight line in the specified order. Calculate the area of $\triangle AD_1B$ while $AB = 10, CD = 9$.

   Answer: 4.75; 49.54

3. Треугольник AOB – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB. Точки C и D расположены на отрезках AO, OB соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику COD, причем точки A, C_1, D_1 лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 15, CD = 4$.

   Triangle AOB is an isosceles right triangle with hypotenuse AB. The points C and D are located on the segments AO, OB, respectively, so that $CD \parallel AB$. $\triangle C_1OD_1$ constructed being equal to triangle COD, moreover, points A, C_1, D_1 lie on one straight line in the specified order. Calculate the area of $\triangle AD_1B$ while $AB = 15, CD = 4$.

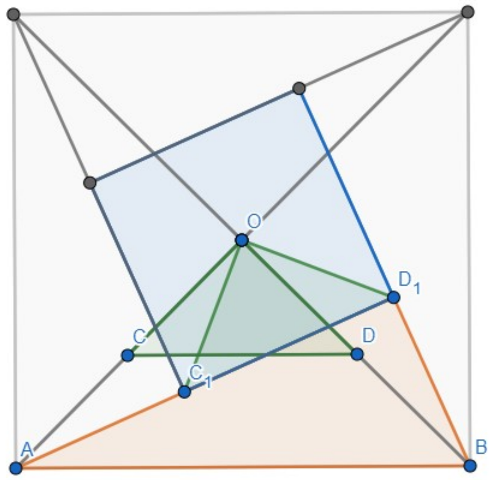
   Answer: 52.25; 77.13

4. Треугольник AOB – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB. Точки C и D расположены на отрезках AO, OB соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику COD, причем точки A, C_1, D_1 лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 16, CD = 13$.

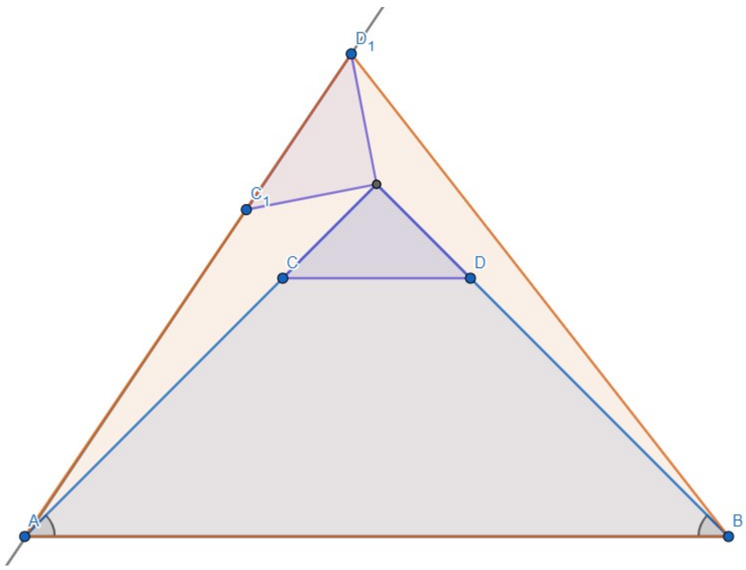
   Triangle AOB is an isosceles right triangle with hypotenuse AB. The points C and D are located on the segments AO, OB, respectively, so that $CD \parallel AB$. $\triangle C_1OD_1$ constructed being equal to triangle COD, moreover, points A, C_1, D_1 lie on one straight line in the specified order. Calculate the area of $\triangle AD_1B$ while $AB = 16, CD = 13$.

   Answer: 21.75; 124.19

Solution (RUS). *(решение варианта 3, остальные решаются аналогично)*
Расширив чертеж, получим два правильных четырёхугольника со сторонами $|AB|$ и $|CD|$ и общим центром O. Заметим, что нам просто нужно вычесть площадь меньшего правильного четырёхугольника (со стороной $|CD|$) из площади большего правильного четырёхугольника (со стороной $|AB|$) и поделить результат на 4 (см. рисунок).
Искомая площадь треугольника равна $\dfrac{|AB|^2 - |CD|^2}{4} = 52.25.$

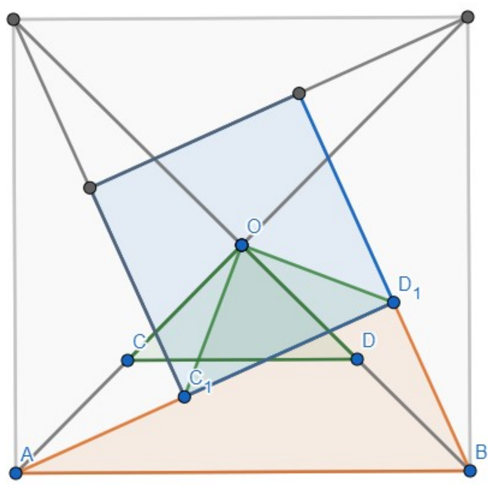


Если же луч AD_1 целиком находится вне треугольника AOB (см. рисунок ниже), получим $S_{ABD_1} \approx 77.13$.

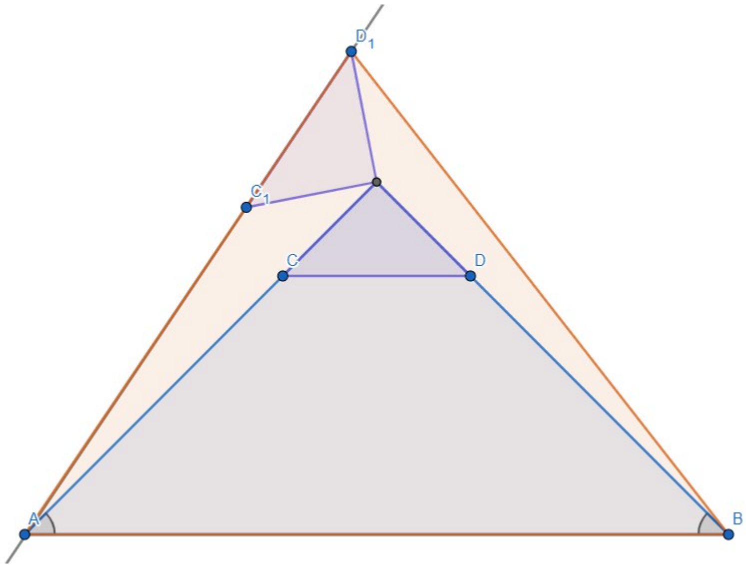


Solution (ENG). *(solution of version 3, the others are solved similarly)*
After extending our picture we get two regular quadrilaterals with sides $|AB|$ and $|CD|$ and the common center is O. Note that we just need to subtract the area of the smaller regular quadrilateral (with the side $|CD|$) from the area of the larger regular quadrilateral (with the side $|AB|$) and divide the result by 4 (see picture).

The desired area of the triangle is $\dfrac{|AB|^2 - |CD|^2}{4} = 52.25.$



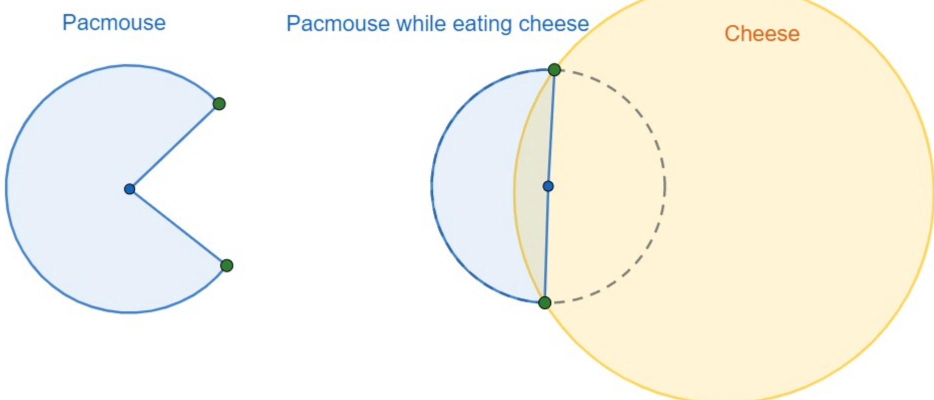
If the ray AD_1 is out of the triangle AOB (see picture below), we get $S_{ABD_1} \approx 77.13$.



Task 4.

1. Пакмыши живут на плоскости и едят круглые сыры. Форма пакмыши (см. рисунок) – круг: когда пакмышь ест, ровно половину этого круга составляют страшные зубастые челюсти. Пакмышь может откусить все, что в неё войдёт. Пакмышь всегда честная (в команде она откусывает поровну с другими пакмышами) и рациональная (откусывает самый большой из возможных кусков и знает, как это сделать). Пакмышь наелась, если откусила от сыра столько, сколько может откусить от него в одиночку.
   Две одинаковые пакмыши нашли круглый сыр диаметра 6 и кусают его одновременно один раз. Найдите наименьшую возможную площадь оставшегося куска сыра, если известно, что пакмыши наелись.

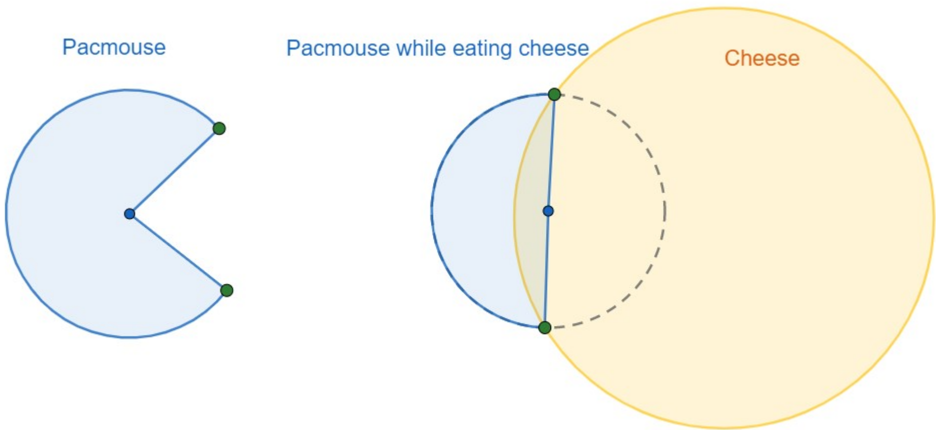
   Pacmouses live on a plane and eat round cheeses. Shape of a pacmouse (see picture) is a circle: when the pacmouse eats, exactly half of this circle is made up of terrible toothy jaws, and pacmouse can bite off everything that enters it. Pacmouse is always honest (in a team, it bites off equally with other pacmouses) and rational (bites off the largest possible piece and knows how to do it). Pacmouse is well-fed if it bit off as much cheese as it could bite off eating alone.
   Two identical pacmouses found a round cheese with the diameter 6 and bite it once at the same time. Find the smallest possible area of the remaining piece of cheese if it is known that the pacmouses are well-fed.



Answer: 9

2. Пакмыши живут на плоскости и едят круглые сыры. Форма пакмыши (см. рисунок) – круг: когда пакмышь ест, ровно половину этого круга составляют страшные зубастые челюсти. Пакмышь может откусить все, что в неё войдёт. Пакмышь всегда честная (в команде она откусывает поровну с другими пакмышами) и рациональная (откусывает самый большой из возможных кусков и знает, как это сделать). Пакмышь наелась, если откусила от сыра столько, сколько может откусить от него в одиночку.
Две одинаковые пакмыши нашли круглый сыр диаметра 10 и кусают его одновременно один раз. Найдите наименьшую возможную площадь оставшегося куска сыра, если известно, что пакмыши наелись.

Pacmouses live on a plane and eat round cheeses. Shape of a pacmouse (see picture) is a circle: when the pacmouse eats, exactly half of this circle is made up of terrible toothy jaws, and pacmouse can bite off everything that enters it. Pacmouse is always honest (in a team, it bites off equally with other pacmouses) and rational (bites off the largest possible piece and knows how to do it). Pacmouse is well-fed if it bit off as much cheese as it could bite off eating alone.
Two identical pacmouses found a round cheese with the diameter 10 and bite it once at the same time. Find the smallest possible area of the remaining piece of cheese if it is known that the pacmouses are well-fed.

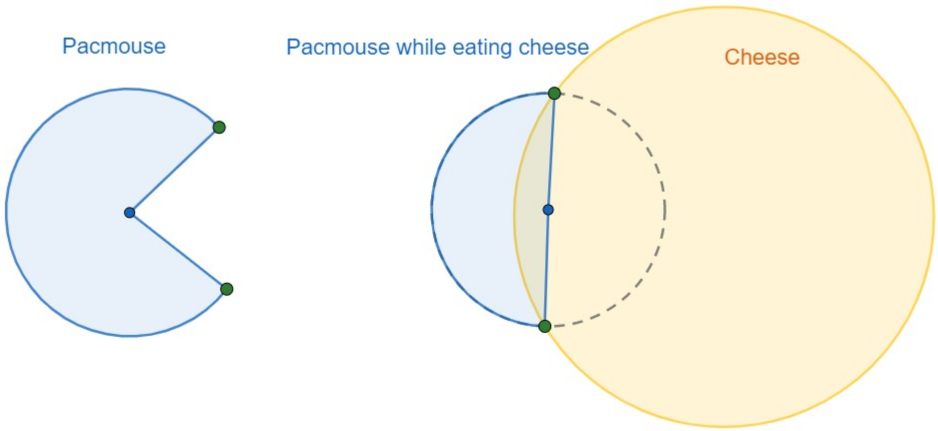


Answer: 25

3. Пакмыши живут на плоскости и едят круглые сыры. Форма пакмыши (см. рисунок) – круг: когда пакмышь ест, ровно половину этого круга составляют страшные зубастые челюсти. Пакмышь может откусить все, что в неё войдёт. Пакмышь всегда честная (в команде она откусывает поровну с другими пакмышами) и рациональная (откусывает самый большой из возможных кусков и знает, как это сделать). Пакмышь наелась, если откусила от сыра столько, сколько может откусить от него в одиночку.
Две одинаковые пакмыши нашли круглый сыр диаметра 12 и кусают его одновременно один раз. Найдите наименьшую возможную площадь оставшегося куска сыра, если известно, что пакмыши наелись.

Pacmouses live on a plane and eat round cheeses. Shape of a pacmouse (see picture) is a circle: when the pacmouse eats, exactly half of this circle is made up of terrible toothy jaws, and pacmouse

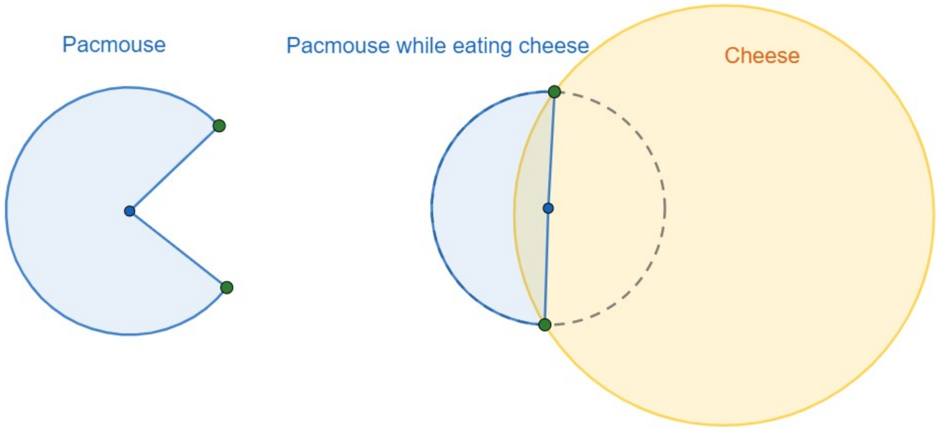
can bite off everything that enters it. Pacmouse is always honest (in a team, it bites off equally with other pacmouses) and rational (bites off the largest possible piece and knows how to do it). Pacmouse is well-fed if it bit off as much cheese as it could bite off eating alone.
Two identical pacmouses found a round cheese with the diameter 12 and bite it once at the same time. Find the smallest possible area of the remaining piece of cheese if it is known that the pacmouses are well-fed.



Answer: 36

4. Пакмыши живут на плоскости и едят круглые сыры. Форма пакмыши (см. рисунок) – круг: когда пакмышь ест, ровно половину этого круга составляют страшные зубастые челюсти. Пакмышь может откусить все, что в неё войдёт. Пакмышь всегда честная (в команде она откусывает поровну с другими пакмышами) и рациональная (откусывает самый большой из возможных кусков и знает, как это сделать). Пакмышь наелась, если откусила от сыра столько, сколько может откусить от него в одиночку.
Две одинаковые пакмыши нашли круглый сыр диаметра 8 и кусают его одновременно один раз. Найдите наименьшую возможную площадь оставшегося куска сыра, если известно, что пакмыши наелись.

Pacmouses live on a plane and eat round cheeses. Shape of a pacmouse (see picture) is a circle: when the pacmouse eats, exactly half of this circle is made up of terrible toothy jaws, and pacmouse can bite off everything that enters it. Pacmouse is always honest (in a team, it bites off equally with other pacmouses) and rational (bites off the largest possible piece and knows how to do it). Pacmouse is well-fed if it bit off as much cheese as it could bite off eating alone.
Two identical pacmouses found a round cheese with the diameter 8 and bite it once at the same time. Find the smallest possible area of the remaining piece of cheese if it is known that the pacmouses are well-fed.



Answer: 16

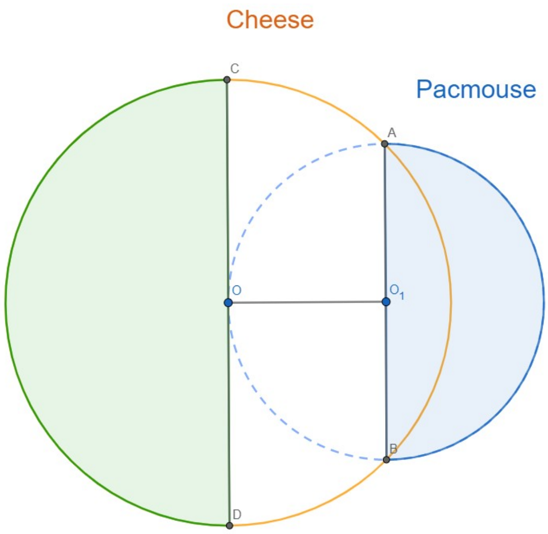
Solution (RUS). Пакмышей две, и они честные и рациональные – значит, у одной мыши в распоряжении полкруга (на рисунке вторая половина зеленая).
Обозначим диаметр пакмышки d, радиус r, для сыра - D и R соответсвенно. Пакмышь наелась, значит, $|AB| = d$ (A и B - крайние точки выгрызенного куска на корке сыра). Нас интересует максимально возможный диаметр, значит, нас интересует случай, когда челюсти пакмыши сомкнулись в центре сыра (окружность радиуса r с центром в точке O_1 коснулась диаметра CD окружности с центром в точке O). Тогда треугольник OO_1A прямоугольный равнобедренный, и $r = OO_1 = O_1A = \frac{\sqrt{2}}{2}R$, то есть, $d = \frac{\sqrt{2}}{2}D$.
Обозначим площадь съеденного куска S_{CK}, S_C - площадь сыра (окружности с центром O радиуса R), S_M - площадь пакмыши (окружности с центром O_1 радиуса r), S_{AB} - площадь меньшего кругового сегмента сыра, отсечённого хордой AB. Тогда:

$$S_{CK} = \frac{S_M}{2} + S_{AB}$$

$$S_{AB} = \frac{S_C - 2R^2}{4}$$

Площадь оставшегося куска

$$S_{OK} = S_C - 2S_{CK} = S_C - 2\left(\frac{S_M}{2} + \frac{S_C - 2R^2}{4}\right) = \frac{S_C}{2} + R^2 - S_M = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) R^2 - \pi r^2 = R^2 = \frac{D^2}{4}$$



Solution (ENG). There are two pacmouses, and they are honest and rational, which means that one mouse has half a circle at its disposal (the second half is green in the picture above).
Let's denote the diameter of the pacmouse d, the radius r, for cheese - D and R respectively. Pacmouse is well-fed, so $|AB| = d$ (A and B are the extreme points of the gnawed piece on the cheese crust). We are interested in the maximum possible diameter, so we are interested in the case when the jaws of the pacmouse closed in the center of the cheese (circle the radius r centered at point O_1 touched the diameter CD of the circle centered at point O). Then the triangle OO_1A is rectangular isosceles, and $r = OO_1 = O_1A = \frac{\sqrt{2}}{2}R$, that is, $d = \frac{\sqrt{2}}{2}D$.
Let's denote the area of the eaten piece S_{CK}, S_C is the area of cheese (circles centered on O of radius R), S_M is the area of pacmouse (circles centered on O_1 of radius r), S_{AB} is the area of a smaller circular segment cheese cut off by the chord AB. Then:

$$S_{CK} = \frac{S_M}{2} + S_{AB}$$

$$S_{AB} = \frac{S_C - 2R^2}{4}$$

The area of the remaining piece

$$S_{OK} = S_C - 2S_{CK} = S_C - 2\left(\frac{S_M}{2} + \frac{S_C - 2R^2}{4}\right) = \frac{S_C}{2} + R^2 - S_M = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) R^2 - \pi r^2 = R^2 = \frac{D^2}{4}$$

Task 5.

1. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 7×7 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

   Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1, 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 7×7. Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

2. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 10×10 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

   Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1, 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 10×10. Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

3. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 9×9 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить

себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1, 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 9×9. Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

4. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 8×8 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

   Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1, 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 8×8. Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

Solution (RUS). См. решение задачи №6 для 7 класса.

Solution (ENG). See solution of the task 6 for the 7th degree.

Task 6.

1. Последовательность многочленов $P_n(x)$, где $n \geq 0$ – целое число, задана рекуррентно: $P_0(x)$ тождественно равен единице (то есть $P_0(x) \equiv 1$), и $P_{n+1}(x) = x^{7(n+1)} - P_n(x)$ для всех $n \geq 0$. Для каждого $n \geq 0$ найти все вещественные корни $P_n(x)$.

   A sequence of polynomials $P_n(x)$ (for all integer $n \geq 0$) is given as $P_0(x) \equiv 1$ and $P_{n+1}(x) = x^{7(n+1)} - P_n(x)$ for all $n \geq 0$. Find all real roots of $P_n(x)$ for an arbitrary integer $n \geq 0$.

2. Последовательность многочленов $P_n(x)$, где $n \geq 0$ – целое число, задана рекуррентно: $P_0(x)$ тождественно равен единице (то есть $P_0(x) \equiv 1$), и $P_{n+1}(x) = x^{11(n+1)} - P_n(x)$ для всех $n \geq 0$. Для каждого $n \geq 0$ найти все вещественные корни $P_n(x)$.

   A sequence of polynomials $P_n(x)$ (for all integer $n \geq 0$) is given as $P_0(x) \equiv 1$ and $P_{n+1}(x) = x^{11(n+1)} - P_n(x)$ for all $n \geq 0$. Find all real roots of $P_n(x)$ for an arbitrary integer $n \geq 0$.

3. Последовательность многочленов $P_n(x)$, где $n \geq 0$ – целое число, задана рекуррентно: $P_0(x)$ тождественно равен единице (то есть $P_0(x) \equiv 1$), и $P_{n+1}(x) = x^{17(n+1)} - P_n(x)$ для всех $n \geq 0$. Для каждого $n \geq 0$ найти все вещественные корни $P_n(x)$.

   A sequence of polynomials $P_n(x)$ (for all integer $n \geq 0$) is given as $P_0(x) \equiv 1$ and $P_{n+1}(x) = x^{17(n+1)} - P_n(x)$ for all $n \geq 0$. Find all real roots of $P_n(x)$ for an arbitrary integer $n \geq 0$.

4. Последовательность многочленов $P_n(x)$, где $n \geq 0$ – целое число, задана рекуррентно: $P_0(x)$ тождественно равен единице (то есть $P_0(x) \equiv 1$), и $P_{n+1}(x) = x^{5(n+1)} - P_n(x)$ для всех $n \geq 0$. Для каждого $n \geq 0$ найти все вещественные корни $P_n(x)$.

A sequence of polynomials $P_n(x)$ (for all integer $n \geq 0$) is given as $P_0(x) \equiv 1$ and $P_{n+1}(x) = x^{5(n+1)} - P_n(x)$ for all $n \geq 0$. Find all real roots of $P_n(x)$ for an arbitrary integer $n \geq 0$.

Solution (RUS). *(решение варианта 1, остальные решаются аналогично)*
Отдельно рассмотрим четные и нечетные значения $n \geq 0$.
Пусть $n = 2k+1 > 0$ – произвольное нечетное целое. Тогда многочлен $P_n(x)$ имеет вид $x^{7(2k+1)} - x^{7\cdot 2k} + \cdots + x^7 - 1 = x^{14k}(x^7-1) + \cdots + (x^7-1) = (x^7-1)\cdot(x^{14k} + x^{14(k-1)} + \cdots + x^{14} + 1)$.
Легко заметить, что $x = 1$ – единственный корень этого многочлена (т.к. $x^{14k} + x^{14(k-1)} + \cdots + x^{14} + 1 \geq 1$ для любого вещественного x).
Пусть $n = 2k > 0$ – произвольное четное целое. Тогда многочлен $P_n(x)$ имеет вид $x^{7\cdot 2k} - x^{7\cdot 2k-7} + \cdots - x^7 + 1$. Докажем, что уравнение $x^{7\cdot 2k} - x^{7\cdot 2k-7} + \cdots - x^7 + 1 = 0$ не имеет решений в вещественных числах.
Для этого предположим противное, то есть что есть такое вещественное число x, для которого верно равенство $x^{7\cdot 2k} - x^{7\cdot 2k-7} + \cdots - x^7 + 1 = 0$.
1) x не может быть ≤ 0 или ≥ 1, т.к. $x^{7\cdot 2k} - x^{7\cdot 2k-7} + \cdots - x^7 + 1 \geq 1$ для таких x.
2) Если же $0 < x < 1$ и $x^{7\cdot 2k} - x^{7\cdot 2k-7} + \cdots - x^7 + 1 = 0$, то $(x^7-1)(x^{7\cdot 2k-7} + x^{7\cdot 2k-21} + \cdots + x^7) = -1$ и $x^{7\cdot 2k-7} + x^{7\cdot 2k-21} + \cdots + x^7 = \frac{1}{1-x^7}$. Слева в этом равенстве стоит сумма конечного числа элементов геометрической прогрессии со знаменателем $0 < x < 1$, а справа стоит полная сумма (бесконечного числа элементов) бесконечно убывающей прогрессии. Равенство этих сумм невозможно. Таким образом, предположение, что уравнение $x^{7\cdot 2k} - x^{7\cdot 2k-7} + \cdots - x^7 + 1 = 0$ имеет решение в вещественных числах во всех случаях привело нас к противоречию. Следовательно, предположение неверно, а уравнение не имеет решений в вещественных числах.
Значит, для любого нечетного $n \geq 0$ многочлен $P_n(x)$ имеет единственный вещественный (не кратный) корень $x = 1$, а для любого четного $n \geq 0$ многочлен $P_n(x)$ не имеет вещественных корней.

Solution (ENG). *(solution of version 1, the others are solved similarly)*
Separately consider the even and odd values of $n \geq 0$.
Let $n = 2k+1 > 0$ be an arbitrary odd integer. Then the polynomial $P_n(x)$ has the form $x^{7(2k+1)} - x^{7\cdot 2k} + \cdots + x^7 - 1 = x^{14k}(x^7-1) + \cdots + (x^7-1) = (x^7-1)\cdot(x^{14k} + x^{14(k-1)} + \cdots + x^{14} + 1)$.
It is easy to notice that $x = 1$ is the only root of this polynomial (because $x^{14k} + x^{14(k-1)} + \cdots + x^{14} + 1 \geq 1$ for any real x).
Let $n = 2k > 0$ be an arbitrary even integer. Then the polynomial $P_n(x)$ has the form $x^{7\cdot 2k} - x^{7\cdot 2k-7} + \cdots - x^7 + 1$. We prove that the equation $x^{7\cdot 2k} - x^{7\cdot 2k-7} + \cdots - x^7 + 1 = 0$ has no solutions in real numbers.
To do this, assume the opposite, that is, that there is a real number x for which the equality $x^{7\cdot 2k} - x^{7\cdot 2k-7} + \cdots - x^7 + 1 = 0$ is true.
1) x cannot be ≤ 0 or ≥ 1 because $x^{7\cdot 2k} - x^{7\cdot 2k-7} + \cdots - x^7 + 1 \geq 1$ for such x.
2) If $0 < x < 1$ and $x^{7\cdot 2k} - x^{7\cdot 2k-7} + \cdots - x^7 + 1 = 0$, then $(x^7-1)(x^{7\cdot 2k-7} + x^{7\cdot 2k-21} + \cdots + x^7) = -1$ and $x^{7\cdot 2k-7} + x^{7\cdot 2k-21} + \cdots + x^7 = \frac{1}{1-x^7}$. On the left in this equation is the (finite) sum of the elements of the geometric progression with the denominator $0 < x < 1$, and on the right is the total (infinite) sum of the progression. Equality of these amounts is impossible. Thus, the assumption that the equation $x^{7\cdot 2k} - x^{7\cdot 2k-7} + \cdots - x^7 + 1 = 0$ has a solution in real numbers in all cases has inoculated us to a contradiction. Therefore, the assumption is incorrect, and the equation has no solutions in real numbers.
Thus, for any odd $n \geq 0$, the polynomial $P_n(x)$ has a single real (non-multiple) root $x = 1$, and for any even $n \geq 0$, the polynomial $P_n(x)$ has no real roots.