# 8-9$^{th}$ degree

**Task 1.**

1. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

   Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 99 пиратов, то доля капитана в таком случае составит 51 монета; а если же он выберет 77 пиратов, то его доля будет уже 29 монет. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 1000?

   Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

   Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 99 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 51 coins; and if he chooses 77 pirates, the captain's share will be 29 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 1000?

   **Answer:** 645

2. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

   Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 81 пирата, то доля капитана в таком случае составит 64 монет; а если же он выберет 99 пиратов, то его доля будет уже 19 монет. Известно, что число монет меньше 800. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 800?

   Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

   Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 81 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 64 coins; and if he chooses 99 pirates, the captain's share will be 19 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 800?

   **Answer:** 712

3. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды

(это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 143 пирата, то доля капитана в таком случае составит 61 монета; а если же он выберет 88 пиратов, то его доля будет уже 39 монет. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 1400?

Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 143 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 61 coins; and if he chooses 88 pirates, the captain's share will be 39 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 1400?

**Answer:** 919

4. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

   Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 91 пират, то доля капитана в таком случае составит 87 монет; а если же он выберет 77 пиратов, то его доля будет уже 17 монет. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 950?

   Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

   Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 91 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 87 coins; and if he chooses 77 pirates, the captain's share will be 17 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 950?

**Answer:** 633

**Solution (RUS).** Пусть в первом случае награда каждого пирата равна $t$, а во втором - $s$. Тогда общая награда равна соответсвенно $99t+51$ и $77s+29$. По условию в обоих случаях награда одинаковая, больше 0 и меньше 1000. Имеем $99t+51=77s+29$.

Во-первых получаем, что $99t+51<1000$, то есть $99t<949$ или $t<\frac{949}{99}=9\frac{50}{99}$. Так как $t$ - целое, то имеем $0<t\leq 9$. Во-вторых, упрощая равенство, получаем $99t+22=77s$, что можно сократить еще раз, поделив на 11. Получаем $9t+2=7s$.
Перебрав варианты $t$ от 0 до 9, находим, что только при $t=6$ полученное число делится 7, чтобы

справа могло получится выражение $7s$. Итого получается, что $t = 6, s = 8$, а само число равно 645.

**Solution (ENG).** Let each pirate's reward be $t$ in the first case, and $s$ in the second. Then the total reward is $99t+51$ and $77s+29$, respectively. According to the condition, in both cases the reward is the same, more than 0 and less than 1000. We have $99t + 51 = 77s + 29$.
First, we get that $99t + 51 < 1000$, that is, $99t < 949$ or $t < \frac{949}{99} = 9\frac{50}{99}$. Since $t$ is an integer, we have $0 < t \leq 9$. Secondly, simplifying the equality, we get $99t + 22 = 77s$, which can be reduced again by dividing by 11. We get $9t + 2 = 7s$.
After going through the options $t$ from 0 to 9, we find that only when $t = 6$ the resulting number is divisible by 7, so that the expression $7s$ can be obtained on the right. In total, it turns out that $t = 6, s = 8$, and the number itself is 645.

**Task 2.**

1. На боковой стороне $CD$ трапеции $ABCD$ ($AD > BC$) отмечена такая точка $P$, что $PC = 2 \cdot DP$. Через эту точку проведена прямая, параллельная $AB$, которая пересекает $AD$ в точке $R$. Найдите площадь треугольника $ABR$, если площадь $ABCD$ равна 40, а $BC = RD$.

   On the side $CD$ of trapezoid $ABCD$ (with its base $AD$ being larger than base $BC$) there is a point $P$ such that $PC = 2 \cdot DP$. Through this point drawn a line parallel to $AB$ that intersects the base $AD$ at point $R$. Find the area of triangle $ABR$ while the area of the trapezoid $ABCD$ is equal to 40 and $BC = RD$.

   **Answer:** 24

2. На боковой стороне $CD$ трапеции $ABCD$ ($AD > BC$) отмечена такая точка $P$, что $PC = 2 \cdot DP$. Через эту точку проведена прямая, параллельная $AB$, которая пересекает $AD$ в точке $R$. Найдите площадь треугольника $ABR$, если площадь $ABCD$ равна 80, а $BC = RD$.

   On the side $CD$ of trapezoid $ABCD$ (with its base $AD$ being larger than base $BC$) there is a point $P$ such that $PC = 2 \cdot DP$. Through this point drawn a line parallel to $AB$ that intersects the base $AD$ at point $R$. Find the area of triangle $ABR$ while the area of the trapezoid $ABCD$ is equal to 80 and $BC = RD$.

   **Answer:** 48

3. На боковой стороне $CD$ трапеции $ABCD$ ($AD > BC$) отмечена такая точка $P$, что $PC = 2 \cdot DP$. Через эту точку проведена прямая, параллельная $AB$, которая пересекает $AD$ в точке $R$. Найдите площадь треугольника $ABR$, если площадь $ABCD$ равна 100, а $BC = RD$.

   On the side $CD$ of trapezoid $ABCD$ (with its base $AD$ being larger than base $BC$) there is a point $P$ such that $PC = 2 \cdot DP$. Through this point drawn a line parallel to $AB$ that intersects the base $AD$ at point $R$. Find the area of triangle $ABR$ while the area of the trapezoid $ABCD$ is equal to 100 and $BC = RD$.

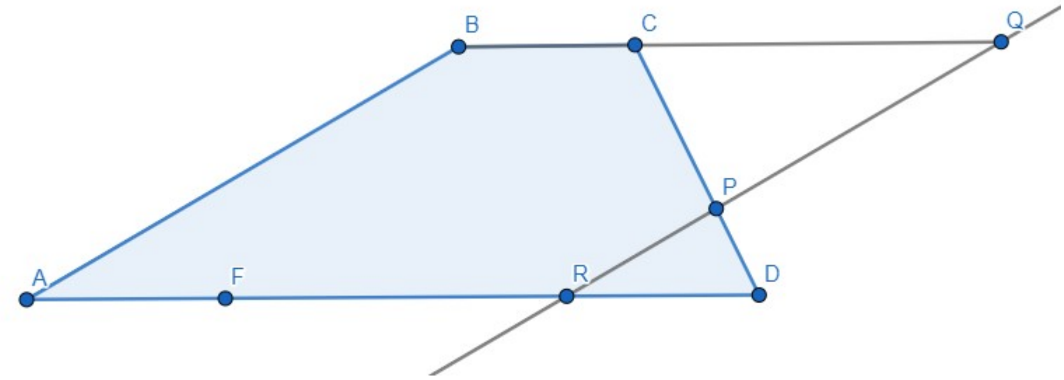
   **Answer:** 60

4. На боковой стороне $CD$ трапеции $ABCD$ ($AD > BC$) отмечена такая точка $P$, что $PC = 2 \cdot DP$. Через эту точку проведена прямая, параллельная $AB$, которая пересекает $AD$ в точке $R$. Найдите площадь треугольника $ABR$, если площадь $ABCD$ равна 60, а $BC = RD$.

On the side $CD$ of trapezoid $ABCD$ (with its base $AD$ being larger than base $BC$) there is a point $P$ such that $PC = 2 \cdot DP$. Through this point drawn a line parallel to $AB$ that intersects the base $AD$ at point $R$. Find the area of triangle $ABR$ while the area of the trapezoid $ABCD$ is equal to 60 and $BC = RD$.

**Answer:** 36

**Solution (RUS).** Обозначим как Q точку пересечения проведённой прямой RP с прямой BC. Тогда, по равенству соответствующих внутренних накрест лежащих углов, треугольники PDR и PCQ подобны друг другу с коэффициентом подобия 1 : 2 (так как этому равно отношение сторон PD к CP по условию). Тогда CQ = 2RD = 2BC.



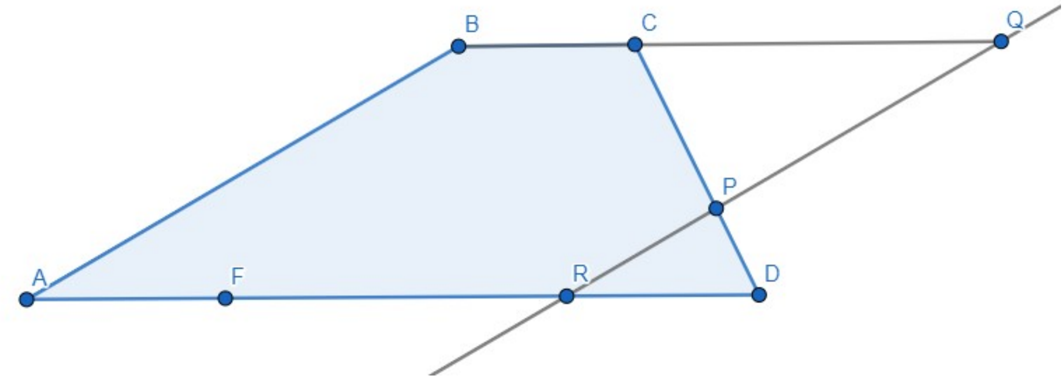

Заметим, что четырёхугольник ABQR по определению является параллелограммом (так как пары противоположных сторон параллельны). Значит, сторона AR равна стороне BQ, то есть AR = BC + CQ = 3RD.

Отметим такую точку F на основании AD, что BC = AF. Тогда ABCF также является параллелограммом (по признаку, так как AF и BC равны и параллельны). Кроме того, если отметить и соединить отрезком середины сторон CQ и FR параллелограмма FCQR, то становится очевидно, что он составлен из двух параллелограммов, каждый из которых совмещается с ABCF параллельным переносом (то есть они равны как геометрические фигуры). Значит, площадь параллелограмма CQRF в два раза больше площади параллелограмма ABCF.

Пусть площадь треугольника RPD равна S. Тогда так как, упоминалось ранее, треугольник PCQ подобен данному треугольнику PDR с коэффициентом 2, то площадь $S_{PCQ} = 2^2 \cdot s = 4 \cdot s$. Аналогично, легко видеть, что треугольник CDF подобен треугольнику PDR с коэффициэнтом 3. Значит, $S_{CDF} = 3^2 \cdot s = 9 \cdot s$. Таким образом, площадь параллелограмма FCQR равна $S_{FCQR} = S_{FCPR} + S_{PCQ} = S_{FCD} - S_{RPD} + S_{PCQ} = 9 \cdot s - s + 4 \cdot s = 12 \cdot s$.

Таким образом, как указано на два абзаца выше, $S_{ABCF} = S_{FCQR}/2$, что равно $6 \cdot s$ по результатам предыдущего абзаца. Остается заметить, что $S_{ABCD} = S_{ABCF} + S_{FCD} = 6 \cdot s + 9 \cdot s$, как было вычислено ранее. То есть $S_{ABCD} = 15 \cdot s = 40$, откуда $s = 40/15 = 8/3$.
Найти же требуется $S_{ABR} = (S_{ABQR}/2$, так как ABQR - параллелограмм, а BR его диагональ. То есть $S_{ABR} = (S_{ABCF} + S_{FCQR})/2 = (6 \cdot s + 12 \cdot s)/2 = 9 \cdot s$. Итого, искомая площади равна $S_{ABR} = 9 \cdot s = 9 \cdot (8/3) = 24$.

**Solution (ENG).** Denote by Q the point of intersection of the drawn line RP with line BC. Then, by equality of the corresponding internal crossover angles, the triangles PDR and PCQ are similar to each other with similarity coefficient 1:2(since this equals the ratio of the sides PD to CP by convention). Then CQ = 2RD = 2BC.




Note that the quadrilateral ABQR is by definition a parallelogram (since pairs of opposite sides are parallel). Thus the side AR is equal to the side BQ, i.e. AR = BC + CQ = 3RD.

Mark a point F on the base of AD such that BC = AF. Then ABCF is also a parallelogram (by the principle since AF and BC are equal and parallel). Besides, if we mark and connect by a segment the midpoints of sides CQ and FR of the FCQR parallelogram, then it becomes obvious that it is composed of two parallelograms, each of which is combined with ABCF by parallel transfer (that is, they are equal as geometrical figures). It means that the area CQRF is twice the area of the parallelogram ABCF.

Let the area of triangle RPD be S. Then since, as mentioned earlier, triangle PCQ is similar to triangle PDR with factor 2, the area $S_{PCQ} = 2^2 \cdot s = 4 \cdot s$. Similarly, it is easy to see that triangle CDF is similar to triangle PDR with factor 3. So $S_{CDF} = 3^2 \cdot s = 9 \cdot s$. Thus, the area of the FCQR parallelogram is $S_{FCQR} = S_{FCPR} + S_{PCQ} = S_{FCD} - S_{RPD} + S_{PCQ} = 9 \cdot s - s + 4 \cdot s = 12 \cdot s$.

Thus, as indicated two paragraphs above, $S_{ABCF} = S_{FCQR}/2$, which equals $6 \cdot s$ according to the results of the previous paragraph. It remains to be seen that $S_{ABCD} = S_{ABCF} + S_{FCD} = 6 \cdot s + 9 \cdot s$, as calculated earlier. That is, $S_{ABCD} = 15 \cdot s = 40$, whence $s = 40/15 = 8/3$.

Finding $S_{ABR} = (S_{ABQR}/2$, since ABQR is a parallelogram and BR is its diagonal. That is, $S_{ABR} = (S_{ABCF} + S_{FCQR})/2 = (6 \cdot s + 12 \cdot s)/2 = 9 \cdot s$. Total, the required area is $S_{ABR} = 9 \cdot s = 9 \cdot (8/3) = 24$.

**Task 3.**

1. Дана доска $6 \times 6$, раскрашенная в шахматном порядке. Сколькими способами можно поставить на белые клетки 9 шашек так, чтобы никакие две шашки не стояли бы на одной клетке и чтобы никакие две шашки не располагались бы в клетках, соседних по углу?

   Given a board with size $6 \times 6$ colored in a checkerboard pattern. How many ways to put 9 checkers on white cells of the board could there be, such that no two checkers would occupy the same cell and would not be located in cells adjacent by the corners?

   **Answer:** 20

2. Дана доска $8 \times 8$, раскрашенная в шахматном порядке. Сколькими способами можно поставить на белые клетки 16 шашек так, чтобы никакие две шашки не стояли бы на одной клетке и чтобы никакие две шашки не располагались бы в клетках, соседних по углу?

   Given a board with size $8 \times 8$ colored in a checkerboard pattern. How many ways to put 16 checkers on white cells of the board could there be, such that no two checkers would occupy the same cell and would not be located in cells adjacent by the corners?

**Answer:** 70

3. Дана доска $4 \times 6$, раскрашенная в шахматном порядке. Сколькими способами можно поставить на белые клетки 6 шашек так, чтобы никакие две шашки не стояли бы на одной клетке и чтобы никакие две шашки не располагались бы в клетках, соседних по углу?

   Given a board with size $4 \times 6$ colored in a checkerboard pattern. How many ways to put 6 checkers on white cells of the board could there be, such that no two checkers would occupy the same cell and would not be located in cells adjacent by the corners?

**Answer:** 10

4. Дана доска $6 \times 8$, раскрашенная в шахматном порядке. Сколькими способами можно поставить на белые клетки 12 шашек так, чтобы никакие две шашки не стояли бы на одной клетке и чтобы никакие две шашки не располагались бы в клетках, соседних по углу?

   Given a board with size $6 \times 8$ colored in a checkerboard pattern. How many ways to put 12 checkers on white cells of the board could there be, such that no two checkers would occupy the same cell and would not be located in cells adjacent by the corners?

**Answer:** 35

**Solution (RUS).** Разделим таблицу на квадраты $2 \times 2$. Ясно, что в каждом квадрате $2 \times 2$ есть ровно одна шашка. Поэтому нам нужно посчитать, сколькими способами можно расставить по одной шашке в каждый квадрат $2 \times 2$, чтобы клетки с шашками не граничили бы по углу.

Без ограничения общности будем считать, что у всех квадратов $2 \times 2$ правая нижняя клетка белая. Будет называть квадрат ПН-квадратом, если шашка стоит в правой нижней его клетке, и ЛВ-квадратом, если шашка стоит в левом верхнем углу.

Заметим, что если какой-то квадрат является ПН-квадратом, то и квадраты справа и снизу от него являются ПН-квадратами. Аналогичное верно и для ЛВ-квадратов. Таким образом, все ПН-квадраты образуют связную область, и все ЛВ-квадраты образуют связную область.

Ясно, что количество расстановок шашек зависит от количества способов разбить наш прямоугольник на две такие области. Линия границы между этими областями ведет из левого нижнего угла таблицы в правй верхний угол по линиям сетки. Количество способов провести такую линию равно соответствующему биномиальному коэффициенту $C_6^3 = 20$.

**Solution (ENG).** Split the given table into $2 \times 2$ cells. There can fit only a single checker inside of each such cell. Hence, we should calculate in how many ways we can place one checker inside each of these $2 \times 2$ cells, so that these cells with checkers would not be adjacent by their corners.

Without the loss of generality, assume that all these $2 \times 2$ squares' bottom-right cell is white. Let us denote a square as a BR-square if the checker is placed in the bottom-right cell of this square, and TL-square if the checker is placed in the top-left cell.

Notice, that if some square is a BR-square, then squares to the right and to the bottom of it are also BR-squares. The same is true for the TL-squares. Therefore, all BR-squares form a connected ares, and all TL-squares form a connected area.

It is clear, that the number of checkers permutations depends on the number of way to split the given board into two such areas. The border line between them starts from the board's bottom-left corner into top-right corner and it follows the lines of the grid. The number of ways to draw this border equals to the corresponding binomial coefficient $C_6^3 = 20$.

**Task 4.**

1. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном $x$ разность $x^{25} - x$ кратна $n$.

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer $x$ the number $x^{25} - x$ is divisible by $n$.

   **Answer:** 31

2. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном $x$ разность $x^{21} - x$ кратна $n$.

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer $x$ the number $x^{21} - x$ is divisible by $n$.

   **Answer:** 15

3. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном $x$ разность $x^{37} - x$ кратна $n$..

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer $x$ the number $x^{37} - x$ is divisible by $n$.

   **Answer:** 127

4. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном $x$ разность $x^{17} - x$ кратна $n$.

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer $x$ the number $x^{17} - x$ is divisible by $n$.

   **Answer:** 15

**Solution (RUS).** Пусть $n = p^\alpha m$, где $(m,p) = 1, p-$ простое и $\alpha \geq 2$. Тогда подставим $x = p^{\alpha-1}m$ и получим сравнение $0 \equiv_n x$, что неверно. Значит, число n свободно от квадратов.
Пусть p - производный простой делитель числа n. Тогда $x^{24} \equiv_p 1$ для всех $x = 1..., p-1$. Но $x^{p-1} \equiv_p 1$ для этих x. Обозначим через d НОД(p - 1, 24).Тогда $x^d \equiv_p 1$ для всех $x = 1, ..., p-1$. Получается, что у уравнения $x^d - 1 \equiv_p 0$ есть p - 1 корень.

Значит, d = p - 1 и 24 $\vdots p-1$.

Итак, мы получаем, что для любого простого делителя p числа n имеет место делимость 24 $\vdots p-1$. Отсюда, p = 2,3,5,7,13. Таким образом, n является произведением каких-то из этих чисел. Итого получаем количество n, равное $2^5 - 1 = 31$ число.

**Solution (ENG).** Let $n = p^\alpha m$, where $(m,p) = 1, p-$ is prime and $\alpha \geq 2$. Then substitute $x = p^{\alpha-1}m$ and get a comparison of $0 \equiv_n x$, which is wrong. So the number n is free of squares.
Let p be the derived prime divisor of the number n. Then $x^{24} \equiv_p 1$ for all $x = 1..., p-1$. But $x^{p-1} \equiv_p 1$ for these x. Denote by d NOD(p - 1, 24).Then $x^d \equiv_p 1$ for all $x = 1, ..., p-1$. It turns out that the equation $x^d - 1 \equiv_p 0$ has a p - 1 root.

So d = p - 1 and 24 $\vdots p-1$.

So we obtain that for any prime divisor p of n there is a divisibility 24 $\vdots p-1$. Hence, p = 2,3,5,7,13. Thus, n is the product of some of these numbers. Total we get a number n equal to $2^5 - 1 = 31$ number.

**Task 5.**

1. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 2022, образуя одно огромное число: 1234567891011...20212022. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

   On a tape all positive integers from 1 to 2022 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...20212022. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3 then Ivan wins, otherwise Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

2. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 1999, образуя одно огромное число: 1234567891011...19981999. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

   On a tape all positive integers from 1 to 1999 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...19981999. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3 then Ivan wins, otherwise Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

3. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 2077, образуя одно огромное число: 1234567891011...20762077. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

On a tape all positive integers from 1 to 2077 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...20762077. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3 then Ivan wins, otherwise Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

4. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 2007, образуя одно огромное число: 1234567891011...20062007. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

   On a tape all positive integers from 1 to 2007 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...20062007. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3 then Ivan wins, otherwise Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

**Solution (RUS).** Стратегия для Пети: пока есть цифры, делящиеся на 3, в свой ход Петя вычеркивает такую цифру. Далее, если ещё потребуется делать ходы, Петя вычеркивает цифры произвольно.

Заметим, что если Пете удастся добиться вычеркивания всех цифр, делящихся на 3 (такие мы далее будем называть хорошими), то финальное однозначное число не будет делиться на 3, а Ваня, соответственно, проиграет. Покажем, что Пете хватит ходов для этого. Сначала выясним общее число ходов (на двоих): это в точности количество цифр изначального числа.

Стратегия для Пети: пока есть цифры, делящиеся на 3, в свой ход Петя вычёркивает такую цифру. Далее, если ещё потребуется делать ходы, Петя вычёркивает цифры произвольно.

Заметим, что если Пете удастся добиться вычёркивания всех цифр, делящихся на 3 (такие мы далее будем называть хорошими ), то финальное однозначное число не будет делиться на 3, а Ваня, соответственно, проиграет. Покажем, что Пете хватит ходов для этого.

Сначала выясним общее количество ходов (на двоих): это в точности количество цифр изначального числа. Это количество составлено из цифр однозначных чисел (которых 9 в записи), двузначных (которых 90), трёхзначных (их 900), и четырёхзначных (их 2022 - 999 = 1023). То есть всего количество цифр в записи изначального длинного числа (будем его называть шаблоном) равно $9+2\cdot 90+3\cdot 900+4\cdot 1023 = 9+180+2700+4092 = 6981$.

Количество ходов же совпадает с количеством вычеркнутых чисел в конце, а их 6980 (так как осталось одно).

Покажем, что хороших цифр в записи шаблона менее половины от 6980 (то есть менее $6980/2 = 3490$). Для этого отдельно посчитаем количество таких цифр, которые получаются из однозначных чисел записи, из двузначных и так далее.

Заметим, что всего в записи чисел от 1 до 9 количество хороших цифр равно 3.

Среди двузначных чисел в записи шаблона количество хороших цифр на первой позиции (соответствующего числа) равно $3 \times 10$, так как на первой позиции, допустимы лишь хорошие цифры 3, 6 и 9 - всего три варианта. Для каждой из этих цифр встретятся все 10 вариантов второй цифры, то есть в разряде единиц. Аналогично вычисляем, что количество хороших цифр на вторых позициях двухзначных чисел в шаблоне равно $4 \times 9$. Итого, хороших цифр, полученных из двузначных чисел в записи шаблона, всего $3 \cdot 10 + 4 \cdot 9 = 30 + 36 = 66$.

Аналогично из трёхзначных чисел в шаблоне получаются $3 \cdot 100 + 4 \cdot 90 + 4 \cdot 90 = 300 + 360 + 360 = 1020$ хороших цифр.

Для четырёхзначных чисел также разделим подсчёт на две части: для чисел от 1000 до 1999 и для чисел от 2000 до 2022. В первой подгруппе во всех числах первая цифра не является хорошей, а количество хороших цифр среди этих тысячи чисел равно $4\cdot 100\times 3 = 1200$.

Во вторую подгруппу (от 2000 до 2023) попали 23 числа. Вручную проверяем, что количество хороших цифр в разряде тысяч равно 0 (все двойки), а в разряде сотен - равно 23 (все нули). В разряде десятков хороших цифр 10, а в разряде единиц 9. Итого из $4 \times 23 = 92$ цифр этих 23х чисел $23 + 10 + 9 = 42$ хороших.

Остаётся отметить, что в каждой из рассмотренных групп количество хороших цифр меньше половины:

в однозначных 3 из 9, в двузначных 66 из 180, в трёхзначных 1020 из 2700, в четырёхзначных в первой подгруппе 1200 из 4000, во второй подгруппе 42 из 92.

Таки образом, хороших цифр в шаблоне меньше количества ходов Пети, то есть он сможет вычеркнуть их все (кроме тех, которые вычеркнет Ваня) и гарантировать себе победу.

**Solution (ENG).** Strategy for Peter: as long as there are digits that divide by 3, on his turn Peter crosses out such a digit. Then, if Peter needs to make more moves, he crosses out the digits randomly.

Note that if Peter manages to cross out all digits divisible by 3 (we'll call such digits good), then the final single-digit number will not divide by 3, and Ivan, correspondingly, will lose. Let's show that Peter has enough moves for that.

First find the total number of moves (for two): this is exactly the number of digits of the initial number. It is the number of digits of one-digit numbers (of which there are 9 in the entry), two-digit numbers (of which there are 90), three-digit numbers (of which there are 900), and four-digit numbers (of which 2022 - 999 = 1023). So, the total number of digits in the original record of a long number (we will call it a pattern) is $9+2\cdot90+3\cdot900+4\cdot1023 = 9+180+2700+4092 = 6981$.

The number of moves coincides with the number of crossed out numbers at the end, and they are 6980 (since there is one left).

Let us show that the good numbers in the pattern entry are less than half of 6980 (that is, less than $6980/2 = 3490$). To do this, we separately count the number of such digits that are obtained from single-digit numbers in the record, from two-digit numbers, and so on.

Note that the total number of good digits in the record of numbers from 1 to 9 is 3.

Among two-digit numbers in the pattern, the number of good digits in the first position (the corresponding number) is $3 \times 10$ (as in the first position, only good numbers 3, 6 and 9 are allowed - a total of three options. For each of these digits will meet all 10 cases of the second digit. Similarly, calculate that the number of good digits on the second positions of two-digit numbers in the pattern is $4 \times 9$. So $3 * 10 + 4 * 9 = 30 + 36 = 66$ good digits obtained from the two-digit numbers in the pattern.

Similarly, the three-digit numbers in the template obtained $3 * 100 + 4 * 90 + 4 * 90 = 300 + 360 + 360 = 1020$ good numbers.

For four-digit numbers we will also divide the calculation into two parts: for numbers from 1000 to 1999 and for numbers from 2000 to 2022. In the first subgroup, the first digit is not good, and the number of good digits among these thousand numbers is $4*100\times3 = 1200$.

In the second subgroup (from 2000 to 2023) only 23 numbers. Manually check that the number of good digits in the thousands division is 0 (all two), and in the hundreds division is 23 (all zeros). The number of good digits in the tens division is 10, and in the units division - 9. The total of $4 \times 23 = 92$ digits of these 23x numbers is $23 + 10 + 9 = 42$ good.

And we have 2331 good numbers and it is less than half. So Peter can cross them all out (except for those that Ivan crosses out) and guarantee victory.

**Task 6.**

1. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 4x^2 + 4xy + 19y^2 \le 2 \\ x - y \le -1 \end{cases}$$

Solve the following system of inequalities:

$$\begin{cases} 4x^2+4xy+19y^2 \le 2 \\ x-y \le -1 \end{cases}$$

2. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 11x^2-10xy+3y^2 \le 3 \\ 5x+y \le -10 \end{cases}$$

Solve the following system of inequalities:

$$\begin{cases} 11x^2-10xy+3y^2 \le 3 \\ 5x+y \le -10 \end{cases}$$

3. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 11x^2+8xy+8y^2 \le 3 \\ x-4y \le -3 \end{cases}$$

Solve the following system of inequalities:

$$\begin{cases} 11x^2+8xy+8y^2 \le 3 \\ x-4y \le -3 \end{cases}$$

4. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 13x^2-4xy+4y^2 \le 2 \\ 2x-4y \le -3 \end{cases}$$

Solve the following system of inequalities:

$$\begin{cases} 13x^2-4xy+4y^2 \le 2 \\ 2x-4y \le -3 \end{cases}$$

**Solution (RUS). (вариант 3)** Выделим в первом неравенстве полные квадраты: $(x+2y)^2+2(3x)^2 \le 3$. Предположим $u=x+2y$, $v=3x$. Тогда $2u^2+v^2 \le 3$ и $v-2u \le -3$. Теперь домножим второе неравенство на 2 и сложим с первым: получим $2(u-1)^2+(v+1)^2 \le 0$, откуда $u=1, v=-1$ и $x=-\frac{1}{3}, y=\frac{2}{3}$.

**(варианты 1,2,4)** Выделим в первом неравенстве полные квадраты: $(2x+y)^2+2(3y)^2 \le 2$. Предположим $u=2x+y$, $v=3y$. Тогда $\frac{u^2}{2}+v^2 \le 1$ и $u-v \le -2$. В координатной системе относительной $u, v$ первое неравенство можно изобразить в виде области внутри эллипса. Второе неравенство образует полуплоскость над прямой $v=u+2$.

Докажем, что эти две полуплоскости не имеют общих точек. Решим систему уравнений: $\begin{cases} v=u+2 \\ \frac{u^2}{2}+v^2-1=0 \end{cases}$

При подставлении первого во второе получаем $3u^2+8u+6=0$. Его дискриминант $D=b^2-4ac=64-72<0$, следовательно система не имеет действительных решений, предположение неверно, поэтому прямая и эллипс не имеют общих точек. Поэтому система неравеств не имеет действительных решений для $u, v$, а следовательно, и для $x, y$.

**Solution (ENG). (version 3)** In the first inequality group up the full squares: $(x+2y)^2+2(3x)^2 \leq 3$. Next, assume $u = x + 2y$, $v = 3x$. Hence, $2u^2 + v^2 \leq 3$ and $v - 2u \leq -3$. Next by multiplying the second inequality by 2 and adding it to the first one we obtain $2(u-1)^2+(v+1)^2 \leq 0$ and subsequently: $u = 1, v = -1$ and $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$.

**(versions 1,2,4)** In the first inequality group up the full squares: $(2x + y)^2 + 2(3y)^2 \leq 2$. Next, assume $u = 2x + y$, $v = 3y$. Hence, $\frac{u^2}{2} + v^2 \leq 1$ and $u - v \leq -2$. In the coordinate system relative to $u, v$ the first inequality is a half-plane inside an ellipse, the second inequality forms a half-plane above the line $v = u + 2$.

Prove that these half-planes do not coincide. Lets solve the system of equations: $\begin{cases} v = u + 2 \\ \frac{u^2}{2} + v^2 - 1 = 0 \end{cases}$

Substituting the first into second yields $3u^2 + 8u + 6 = 0$. Its discriminant $D = b^2 - 4ac = 64 - 72 < 0$, therefore the system has no real solutions, the initial assumption was incorrect, hence the line and the ellipse do not have any common points.
These two half-planes are neither enclosed nor touching, therefore the given system has no real solutions for $u, v$ and so for $x, y$.