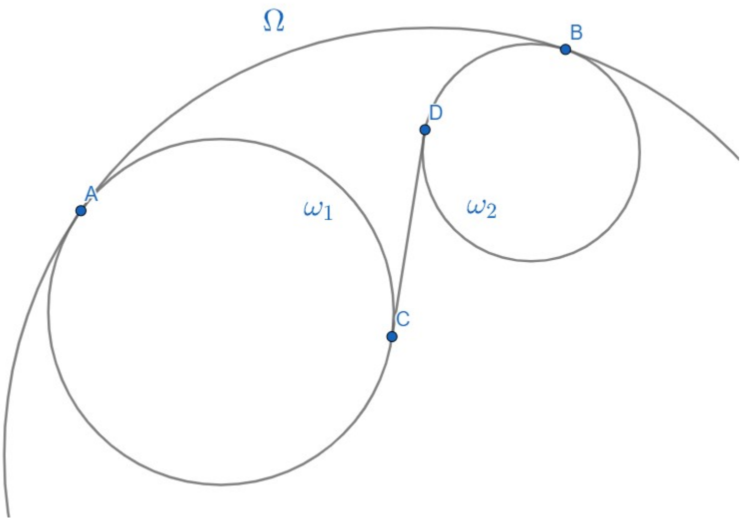
8-9th degree

Task 1. Окружности ω_1 и ω_2, не имеющие общих точек, касаются окружности Ω внутренним образом в точках A и B, соответственно. Центры окружностей ω_1 и ω_2 расположены по разные стороны от прямой CD – общей касательной этих окружностей, причем точка C лежит на ω_1, а точка D – на ω_2. Найдите градусную меру дуги AB окружности Ω, если угол между прямыми AC и BD составляет $55°$.



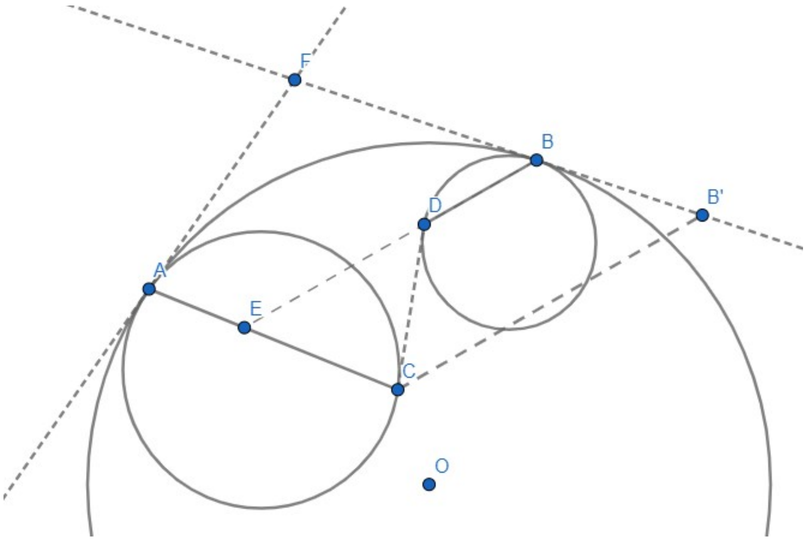
The circles ω_1 and ω_2 (which have no common points) touch the circle Ω internally at the points A and B, respectively. The centers of the circles ω_1 and ω_2 are located on opposite sides of the line CD which is the common tangent line of these circles while the point C lies on ω_1 and the point D lies on ω_2. Find the degree measure of the arc AB of the circle Ω if the angle between the lines AC and BD is $55°$.

Solution (RUS). Пусть искомая градусная мера дуги AB равна ϕ; O – центр окружности Ω. Касательные к этой окружности в точках A, B будут касательными к окружностям ω_1, ω_2 (соответственно) и пересекутся в точке F. Поскольку $\angle OAF = \angle OBF = 90°$, из суммы углов четырехугольника $AOBF$ получим $\angle AFB = 180° - \phi$.

Касательные, проведенные к окружности в концах одной хорды, составляют с этой хордой равные углы, поскольку отрезки этих касательных вместе с хордой образуют равнобедренный треугольник. Поэтому $\angle FAC = \angle DCA$ (обозначим этот угол за α), аналогично $\angle FBD$ равен углу между прямой CD и хордой BD окружности ω_2 (обозначим этот угол за β).

Пусть E – точка пересечения прямых AC и BD, тогда $\angle CDE = \beta$, и для углов треугольника CDE имеем $\angle CED + \alpha + \beta = 180°$, откуда ввиду $\angle CDE = 55°$ получим $\alpha + \beta = 125°$.

Пусть $CB' \parallel DB$, где точка B' лежит на прямой FB.



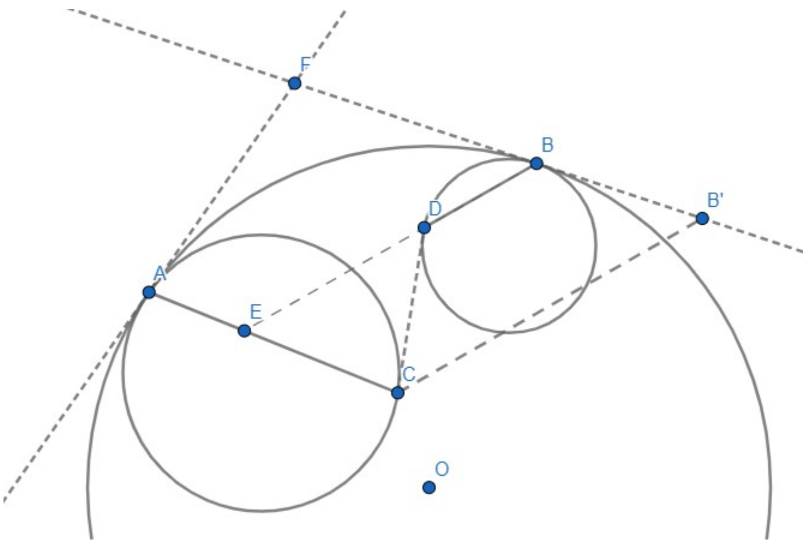
Тогда $\angle ACB' = \alpha + \beta$, и из суммы углов четырехугольника $ACB'F$ с учетом введенных обозначений получим $180° - \phi + 2(\alpha + \beta) = 360°$, откуда $\phi = 2(\alpha + \beta) - 180° = 2 \cdot 125° - 180° = 70°$.

Solution (ENG). Let the required degree measure of the arc AB be equal to ϕ; O is the center of the circle Ω. The tangent lines to this circle at the points A, B will also be tangents to the circles ω_1, ω_2 (respectively) and will intersect at the point F. Since $\angle OAF = \angle OBF = 90°$, from the sum of the angles of $AOBF$ we get $\angle AFB = 180° - \phi$.

The tangents drawn to the circle at the ends of one chord make equal angles with this chord, since the segments of these tangents together with the chord form an isosceles triangle. Therefore, $\angle FAC = \angle DCA$ (we denote this angle by α), similarly $\angle FBD$ is equal to the angle between the line CD and the chord BD of the circle ω_2 (we denote this angle by β).

Let E be the intersection point of lines AC and BD, then $\angle CDE = \beta$, and for the angles of triangle CDE we have $\angle CED + \alpha + \beta = 180°$, and from $\angle CDE = 55°$ we get $\alpha + \beta = 125°$.

Let $CB' \parallel DB$ for the point B' which lies on the line FB.



Then $\angle ACB' = \alpha + \beta$, and from the sum of the angles of the quadrilateral $ACB'F$, taking into account the introduced notation, we obtain $180° - \phi + 2(\alpha + \beta) = 360°$, whence $\phi = 2(\alpha + \beta) - 180° = 2 \cdot 125° - 180° = 70°$.

Task 2. Алиса и Боб играют в игру. На плоскости отмечены $n > 1$ точек общего положения (т.е. никакие три из них не лежат на одной прямой), где n – нечетное натуральное число. Алиса и Боб по очереди (начиная с Алисы) выбирают пару точек и соединяют их отрезком (запрещается повторно соединять точки, которые уже соединены отрезком). Проигрывает тот, после чьего хода образуется цикл нечетной длины.

Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?

Alice and Bob are playing a game. For an odd integer $n > 1$ there are n points chosen on a plane in such way that there can't be chosen three of them lying at the same line. Alice and Bob make their moves (starting with Alice) by choosing a pair of the points and connecting them with a segment (it is forbidden to reconnect points that are already connected). The one whose move forms a cycle of odd number of segments – loses the game.

Who will win if both opponents play correctly?

Solution (RUS). Докажем, что выиграет Боб, т.е. что в любой момент времени после хода Алисы он сможет сделать свой ход и не проиграть. Рассмотрим граф, возникающий перед ходом Боба. Поскольку он не содержит циклов нечетной длины, этот граф является двудольным. Пусть a и b – размеры его долей. Ясно, что проведение любого нового ребра между долями не приведет к поражению, поэтому, если Боб может провести такое ребро, он его проведет.

Предположим, что Боб не может сделать ход. Тогда перед его ходом возник полный двудольный граф $K_{a,b}$. Но поскольку $a+b=n$ – нечетно, числа a и b имеют разную четность, а количество проведенных ребер равно ab – четно. Однако после хода Алисы проведено нечетное число ребер. Значит, после ее хода никак не может получиться полный двудольный граф. Поэтому Боб всегда сможет сделать непроигрывающий ход, а значит, он выиграет.

Solution (ENG). Lets prove that Bob wins, i.e. that at any time after Alice's move, he can make his move and not lose. Consider the graph that appears before Bob's move with its vertices being the points and its edges being the segments drawn. Since it does not contain cycles of odd length, this graph is bipartite. Let a and b be the sizes of its parts. It is clear that drawing any new edge between the parts will not lead to loss, so if Bob can draw such an edge, he will draw it.

Let's say Bob can't make a move. Then, before his move, we have a complete bipartite graph $K_{a,b}$. But since $a + b = n$ is odd, the numbers a and b have different parity, and the number of drawn edges is equal to ab – even number. However, after Alice's move, an odd number of edges are drawn. Hence, after ner move there is no way to get a complete bipartite graph. Therefore, Bob can always make a non-losing move, which means he will win.

Task 3. Для всех вещественных $x, y, z \geq 1$ докажите неравенство

$$\frac{x+y+z}{3} + xyz \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2$$

Prove for real $x, y, z \geq 1$:

$$\frac{x+y+z}{3} + xyz \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2$$

Solution (RUS). По неравенству Коши-Буняковского-Шварца имеем

$$x + xyz = x(1+yz) = x(1+(y-1+1)(z-1+1)) \geq (x-1+1)(1+(\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1})^2) \geq$$

$$\geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x + xyz \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2 \\ y + xyz \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2 \\ z + xyz \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2 \end{cases}$$

Сложив эти неравенства и поделив обе части полученного неравенства на 3, получим требуемое.

Solution (ENG). After applying Cauchy-Schwarz inequality we get

$$x+xyz = x(1+yz) = x(1+(y-1+1)(z-1+1)) \geq (x-1+1)(1+(\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1})^2) \geq$$

$$\geq (\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1})^2$$

Thus,

$$\begin{cases} x+xyz \geq (\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1})^2 \\ y+xyz \geq (\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1})^2 \\ z+xyz \geq (\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1})^2 \end{cases}$$

After summing these inequalities and dividing both parts of the resulting inequality by 3, we get the required.

Task 4. Весьма нестандартный людоед вечером перед сном поймал дружных математиков. «Сегодня я сыт, но завтра я разделаюсь с вами», – сказал он и потом продолжил: «Сегодняшнюю ночь вы проведете в общей камере, а завтра утром я рассажу вас по отдельным камерам с номерами, потом каждого из вас по отдельности (с глазу на глаз) спрошу, какой номер его камеры, и тех, кто угадает в этой первой попытке, выпущу из их камер у всех на глазах. Но после этого я каждому, кто сразу не угадал номер его камеры, дам еще одну попытку – еще раз (с глазу на глаз) спрошу про номер его камеры, однако, если хоть один из них ошибется – я съем всех!».

Как спастись всем математикам?

Известно, что математиков $n > 1$, индивидуальных камер тоже n, они пронумерованы какими-то целыми числами из диапазона от 0 до $(n-1)$ (однако, в беспорядке и, возможно, с повторами и пропусками каких-то номеров – людоед-то малограмотный), из каждой камеры видны номера всех камер, кроме номера самой этой камеры, в общей камере математики могут договариваться о каком угодно алгоритме угадывания номеров своих камер, но в индивидуальных камерах они не могут общаться (передавать какие-либо сигналы друг другу), а разговор с глазу на глаз слышат только его непосредственные участники (людоед и математик, участвующие в разговоре). Сам людоед честный: он действительно отпускает у всех на глазах математиков, которые угадали номера своих камер в первой попытке.

A very unusual cannibal caught some mathematicians at the evening. «Today I am full, but tomorrow I will eat you», he said and then continued: «Tonight you will spend in a common cell, and tomorrow morning I will put you in enumerated separate cells, then I will ask each of you (in private) about what his cell number is, and those who guess correctly in this first attempt will be released from their cells in front of everyone. After that, I will give everyone else one more attempt – once again each of them will be asked (in private) about the number of his cell. If at least one of them will not guess the number, then I will eat them all!».

How can all mathematicians save themselves?

It is known that there are $n > 1$ mathematicians and n individual chambers that are numbered with some integers from the range from 0 to $(n-1)$ (however, in disorder and, possibly, with repetitions and gaps because the cannibal is poor in counting), from each cell you can see the numbers of all the other cells (but cannot see the number of your cell itself), and in the common chamber mathematicians can discuss their strategy, but in separate cells they cannot communicate in any way. The cannibal himself is honest: he really lets go those mathematicians who guessed the numbers of their cells in the first attempt, and all others will see it.

Solution (RUS). Сначала в общей камере математикам надо присвоить всем индивидуальные номера от 0 до $(n-1)$. Пусть людоед рассадил математиков по камерам с номерами $k_0, \ldots, k_{n-1}$, где $k_i \in \{0, \ldots, n-1\}$ обозначает номер индивидуальной камеры, в которую посажен математик с номером $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Каждый математик $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ может подсчитать сумму $S_i = \sum\limits_{j=0, j\neq i}^{n-1} k_j$, но не может подсчитать сумму $S = \sum\limits_{j=0}^{n-1} k_j$, однако для каждого $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ имеем

$$k_i = S - S_i \equiv (S - S_i) \pmod n \equiv (S \pmod n) - S_i \pmod n) \pmod n$$

К сожалению, $S \pmod n$ никому из математиков не известно заранее, но пусть в качестве «кандидата» на $S \pmod n$ каждый математик называет свой собственный номер $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Таким образом за первую попытку все математики вместе переберут (так сказать, параллельно) все возможные варианты $(S \pmod n) \in \{0, \ldots, n-1\}$, и, следовательно хотя бы один математик будет освобожден у всех на глазах. Пусть номер этого математика $m \in \{0, \ldots, n-1\}$, и, следовательно, это число m он назвал в качестве $S \pmod n$, поэтому во второй попытке каждому заключённому математику $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ в качестве номера камеры следует назвать $(m - (S_i \pmod n)) \pmod n$, чтобы спастись.

Solution (ENG). First, in the common chamber, mathematicians must assign individual numbers from 0 to $(n-1)$ to everyone. Let the cannibal seat the mathematicians in cells with numbers $k_0, \ldots, k_{n-1}$, where $k_i \in \{0, \ldots, n-1\}$ denotes the number of the individual cell in which the mathematician with number $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ sits.

Every mathematician $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ can calculate the sum $S_i = \sum\limits_{j=0, j\neq i}^{n-1} k_j$, but can't calculate the sum $S = \sum\limits_{j=0}^{n-1} k_j$, but for each $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ we have

$$k_i = S - S_i \equiv (S - S_i) \pmod n \equiv (S \pmod n) - S_i \pmod n) \pmod n$$

Unfortunately, none of the mathematicians knows $S \pmod n$ in advance, but let each mathematician name his own number $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ as a «candidate» for $S \pmod n$. Thus, during the first attempt, all mathematicians together will check all possible options of $(S \pmod n) \in \{0, \ldots, n-1\}$, and, consequently, at least one mathematician will be freed in front of the others. Let the number of this mathematician be $m \in \{0, \ldots, n-1\}$, and, consequently, he named this number m as $S \pmod n$, so in the second attempt each other mathematician with number $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ should name $(m - (S_i \pmod n)) \pmod n$ as cell number – that's the way to escape.

Task 5. *(задача предоставлена партнером Олимпиады – компанией «Тинькофф Образование»)* На столе лежат 16 карточек: на одной из них написано число 1, на второй – 2, на третьей – 3, ..., на последней – 16. Вася перевернул их все и быстро перемешал так, что Петя не успел запомнить местоположение ни одной карточки, а сам Вася запомнил всё.

Петя хочет выложить все 16 карточек в ряд, не переворачивая их, так, чтобы числа на них шли слева направо либо по возрастанию, либо по убыванию. Вася хочет ему в этом помочь. За одну подсказку Вася может указать на две карточки и сказать Пете, чему равен модуль разности чисел на них (не сообщая, какое из чисел больше).

За какое наименьшее количество подсказок Вася может помочь Пете гарантированно добиться цели?

There are 16 sheets on a table with the number 1 written on the first one, number 2 on the second one, number 3 on the third one, ..., and number 16 on the last one. Vasil turned them all over and quickly mixed them so that Peter did not have time to remember the location of any sheet, while Vasil remembered all of them.

Peter wants to put all 16 sheets in a row (without turning them over) in such way that the numbers on them go from left to right either in increasing or in decreasing way. Vasil wants to help Peter in this. For one hint, Vasil can point at two sheets and tell Peter the difference between numbers on them without telling which of the numbers is larger.

For what smallest number of tips can Vasil help Peter to achieve the goal for sure?

Solution (RUS). Переведём задачу на язык графов: вершинами будут наши карточки с номерами от 1 до 16, а две вершины будем соединять ребром, если Вася указывал на данные две карточки и говорил их модуль разности. Рассмотрим случаи, какими могут быть компоненты связности данного графа. Предположим, что есть хотя бы две изолированные вершины (то есть две карточки, про которые ни разу ничего не говорили). В этом случае Петя не сможет расположить карточки в порядке возрастания/убывания, так как случаи, когда эти две карточки лежат в правильном порядке и когда эти две карточки поменяны местами, он различить не сможет. Противоречие.

Предположим, что есть компонента связности, состоящая из 2 вершин i и j (то есть пара карточек, на которую Вася указывал, но больше ни на одну из этих двух карточек он не указывал). Аналогично прошлому случаю Петя не сможет расположить карточки в порядке возрастания/убывания, так как случаи, когда карточки i и j лежат в правильном порядке и когда эти они поменяны местами, Петя различить не сможет, ведь он про них знает только модуль их разности, а в этих случаях модуль разности одинаковый. Противоречие.

Итак, в графе на 16 вершинах максимум 1 изолированная вершина, а все другие компоненты связности имеют минимум 3 вершины. Значит, компонент связности максимум 6, а рёбер не менее $16-6=10$ (как известно, рёбер в графе не меньше количества вершин, уменьшенного на количество компонент связности). Тем самым, количество подсказок должно быть не менее 10.

Теперь приведём пример 10 подсказок, по которым Петя сможет расположить карточки в нужном порядке. Пусть Вася укажет на следующие пары:

$$(1,16),(1,14),(15,3),(15,4),(2,12),(2,11),(13,6),(13,7),(5,10),(5,9)$$

Со стороны Пети эти подсказки обозначим следующим образом:

$$(a_1,a_2,15),(a_1,a_3,13),(a_4,a_5,12),(a_4,a_6,11),(a_7,a_8,10),(a_7,a_9,9),(a_{10},a_{11},7),(a_{10},a_{12},6),$$

$$(a_{13},a_{14},5),(a_{13},a_{15},4),$$

где a_i – это обозначение карточек, а третье число – это модуль разности чисел на двух данных карточках.

Покажем, как Пете по этим данным расположить карточки в нужном порядке. Для этого он будет последовательно выкладывать карточки на позиции с 1 по 16. По подсказке $(a_1,a_2,15)$ Петя понимает, что на карточках a_1 и a_2 должны быть написаны числа 1 и 16. Тогда пусть Петя положит a_1 на первую позицию, a_2 – на 16-ю и тогда по второй подсказке понятно, что a_3 должно лежать на 14-й позиции:

$$a_1,\square,\square,\square,\square,\square,\square,\square,\square,\square,\square,\square,\square,a_3,\square,a_2$$

Есть два варианта, какие именно числа написаны на выложенных карточках:
$1,\square,\square,\square,\square,\square,\square,\square,\square,\square,\square,\square,\square,14,\square,16$ или $16,\square,\square,\square,\square,\square,\square,\square,\square,\square,\square,\square,\square,3,\square,1$. По подсказке $(a_4,a_5,12)$ Петя понимает, что карточки a_4 и a_5 должны лежать на позициях 3 и 15 (для любых других двух позиций модуль разности будет меньше 12), причём по следующей подсказке $(a_4,a_6,11)$ можно понять, что a_4 не может лежать на 3-й позиции (иначе карточка a_6 должна

была бы попасть на 14-ю позицию, которая занята). Получаем, что карточки a_4, a_5, a_6 однозначно попадают на позиции $15, 3, 4$ соответственно:

$$a_1, \square, a_5, a_6, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, a_3, a_4, a_2$$

Есть два варианта, какие именно числа написаны на выложенных карточках:
$1, \square, 3, 4, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, 14, 15, 16$ или $16, \square, 14, 13, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, 3, 2, 1$.

Аналогично далее по подсказкам $(a_7, a_8, 10)$ и $(a_7, a_9, 9)$ понимаем, что a_7, a_8, a_9 стоят на позициях $2, 12, 11$ соответственно:

$$a_1, a_7, a_5, a_6, \square, \square, \square, \square, \square, \square, a_9, a_8, \square, a_3, a_4, a_2$$

Есть два варианта, какие именно числа написаны на выложенных карточках:
$1, 2, 3, 4, \square, \square, \square, \square, \square, \square, 11, 12, \square, 14, 15, 16$ или $16, 15, 14, 13, \square, \square, \square, \square, \square, \square, 6, 5, \square, 3, 2, 1$. Проводя те же рассуждения ещё два раза для пар подсказок $(a_{10}, a_{11}, 7), (a_{10}, a_{12}, 6)$ и $(a_{13}, a_{14}, 5), (a_{13}, a_{15}, 4)$, Петя выложит карточки в порядке

$$a_1, a_7, a_5, a_6, a_{13}, a_{11}, a_{12}, \square, a_{15}, a_{14}, a_9, a_8, a_{10}, a_3, a_4, a_2$$

Опять же, есть два варианта, какие именно числа написаны на выложенных карточках:
$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \square, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$ или $16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, \square, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$. Осталось положить последнюю карточку a_{16} (которую Вася не упоминал) на 8-ю позицию, и тогда в полученном ряду

$$a_1, a_7, a_5, a_6, a_{13}, a_{11}, a_{12}, a_{16}, a_{15}, a_{14}, a_9, a_8, a_{10}, a_3, a_4, a_2$$

числа от 1 до 16 будут идти либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания.

Solution (ENG). Let's translate the problem into the language of graphs: the vertices will be our sheets with numbers from 1 to 16, and we will connect two vertices with an edge if Vasil pointed to these two sheets and spoke the difference in their numbers. Consider the cases of what the connected components of a given graph can be. Suppose that there are at least two isolated vertices (that is, two sheets about which nothing has ever been said). In this case, Peter will not be able to arrange the sheets in ascending or descending order, since he will not be able to distinguish between the cases when these two sheets are in the correct order or when these they are swapped. By that, we have a contradiction.

Suppose that there is a connected component consisting of 2 vertices i and j (that is, a pair of sheets that Vasil pointed to, but he did not point to any of these two sheets separately). Similarly to the previous case, Peter will not be able to arrange the sheets in ascending/descending order, since the cases when the sheets i and j lie in the correct order, and when they are swapped, Peter will not be able to distinguish, because he only knows about their difference. Again, we have a contradiction.

So, in a graph on 16 vertices, at most 1 is an isolated vertex, and all other connected components have at least 3 vertices. This means that there are at most 6 connected components, and at least $16 - 6 = 10$ edges (as you know, the number of edges in a graph is not less than the number of vertices reduced by the number of connected components). Thus, the number of hints must be at least 10.

Now let's give an example of 10 hints, according to which Peter will be able to arrange the sheets in the right order. Let Vasil point out the following pairs:

$$(1, 16), (1, 14), (15, 3), (15, 4), (2, 12), (2, 11), (13, 6), (13, 7), (5, 10), (5, 9)$$

From Peter's point of view, these hints will be denoted as follows:

$$(a_1, a_2, 15), (a_1, a_3, 13), (a_4, a_5, 12), (a_4, a_6, 11), (a_7, a_8, 10), (a_7, a_9, 9), (a_{10}, a_{11}, 7), (a_{10}, a_{12}, 6),$$

$$(a_{13}, a_{14}, 5), (a_{13}, a_{15}, 4),$$

where a_i is the designation of the sheets, and the third number in each triple is the difference between the numbers on the two sheets given.

Let's show how Peter can arrange the sheets in the right order according to these data. To do this, he will sequentially lay out sheets in positions from 1 to 16. At the hint $(a_1, a_2, 15)$ Peter understands that the numbers 1 and 16 should be written on the cards a_1 and a_2. Then let Peter put a_1 in the first position, a_2 in the 16th position, and then it is clear from the second hint that a_3 must be in the 14th position:

$$a_1, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, a_3, \square, a_2$$

There are two options for which numbers are written on the laid out sheets:
$1, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, 14, \square, 16$ or $16, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, 3, \square, 1$. By the hint $(a_4, a_5, 12)$ Peter understands that sheets a_4 and a_5 must lie at positions 3 and 15 (for any other two positions, the difference will be less than 12), and according to the hint $(a_4, a_6, 11)$ it can be understood that a_4 cannot lie on the 3th position (otherwise the sheet a_6 would have to fall on the 14th position, which is occupied). We get that sheets a_4, a_5, a_6 uniquely fall into positions $15, 3, 4$, respectively:

$$a_1, \square, a_5, a_6, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, a_3, a_4, a_2$$

There are two options for which numbers are written on the laid out sheets:
$1, \square, 3, 4, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, 14, 15, 16$ or $16, \square, 14, 13, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, 3, 2, 1$.

Similarly, using hints $(a_7, a_8, 10)$ and $(a_7, a_9, 9)$, we understand that a_7, a_8, a_9 are at positions $2, 12, 11$, respectively:

$$a_1, a_7, a_5, a_6, \square, \square, \square, \square, \square, \square, a_9, a_8, \square, a_3, a_4, a_2$$

There are two options for which numbers are written on the laid out sheets:
$1, 2, 3, 4, \square, \square, \square, \square, \square, \square, 11, 12, \square, 14, 15, 16$ or $16, 15, 14, 13, \square, \square, \square, \square, \square, \square, 6, 5, \square, 3, 2, 1$. Carrying out the same reasoning two more times for pairs of hints $(a_{10}, a_{11}, 7), (a_{10}, a_{12}, 6)$ and $(a_{13}, a_{14}, 5), (a_{13}, a_{15}, 4)$, Peter will lay out the sheets in order

$$a_1, a_7, a_5, a_6, a_{13}, a_{11}, a_{12}, \square, a_{15}, a_{14}, a_9, a_8, a_{10}, a_3, a_4, a_2$$

Again, there are two options for which numbers are written on the laid out sheets:
$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \square, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$ or $16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, \square, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$. It remains to put the last sheet a_{16} (which Vasil did not mention) to the 8th position, and then in the resulting row

$$a_1, a_7, a_5, a_6, a_{13}, a_{11}, a_{12}, a_{16}, a_{15}, a_{14}, a_9, a_8, a_{10}, a_3, a_4, a_2$$

numbers from 1 to 16 will either be in ascending or descending order.