10-12th degree

Task 1.

1. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном x разность $x^{25} - x$ кратна n.

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer x the number $x^{25} - x$ is divisible by n.

2. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном x разность $x^{21} - x$ кратна n.

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer x the number $x^{21} - x$ is divisible by n.

3. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном x разность $x^{37} - x$ кратна n..

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer x the number $x^{37} - x$ is divisible by n.

4. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном x разность $x^{17} - x$ кратна n.

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer x the number $x^{17} - x$ is divisible by n.

Task 2.

1. Алиса и Боб играют в игру. На столе лежат k листов бумаги. Сначала Алиса пишет на каждом листе набор каких-то чисел от 1 до 2022 (на разных листах числа могут повторяться; также Алиса может не написать ни одного числа на каком-то листке или написать сразу все числа). Затем Алиса пишет на обратной стороне каждого листа все оставшиеся числа от 1 до 2022 (т.е. на каждом листе записаны все числа от 1 до 2022). Затем Боб переворачивает некоторые листы другой стороной вверх (он также может не перевернуть ни одного листа или пере- вернуть сразу все). Боб выигрывает, если на верхних сторонах всех листов будут записаны все числа от 1 до 2022. При каком наименьшем k Боб гарантированно сможет выиграть?

   Alice and Bob are playing a game. There are k sheets of paper on the table. First, Alice writes on each sheet a set of some numbers from 1 to 2022 (numbers can be repeated on different sheets; Alice can also leave an empty sheet or write all the numbers at once). Then Alice writes on the back of each sheet all the remaining numbers from 1 to 2022 (that is, each sheet contains all the numbers from 1 to 2022). Then Bob turns some of the sheets upside down (he can also turn none of the sheets, or turn them all over at once). Bob wins if all numbers from 1 to 2022 are written on the top sides of all sheets. What is the minimum k for which Bob is guaranteed to win?

2. Алиса и Боб играют в игру. На столе лежат k листов бумаги. Сначала Алиса пишет на каждом листе набор каких-то чисел от 1 до 2077 (на разных листах числа могут повторяться; также Алиса может не написать ни одного числа на каком-то листке или написать сразу все числа). Затем Алиса пишет на обратной стороне каждого листа все оставшиеся числа от 1 до 2077 (т.е. на каждом листе записаны все числа от 1 до 2077). Затем Боб переворачивает некоторые листы другой стороной вверх (он также может не перевернуть ни одного листа или пере- вернуть сразу все). Боб выигрывает, если на верхних сторонах всех листов будут записаны все числа от 1 до 2077. При каком наименьшем k Боб гарантированно сможет выиграть?

   Alice and Bob are playing a game. There are k sheets of paper on the table. First, Alice writes on each sheet a set of some numbers from 1 to 2077 (numbers can be repeated on different sheets; Alice can also leave an empty sheet or write all the numbers at once). Then Alice writes on the back of each sheet all the remaining numbers from 1 to 2077 (that is, each sheet contains all the numbers from 1 to 2077). Then Bob turns some of the sheets upside down (he can also turn none of the sheets, or turn them all over at once). Bob wins if all numbers from 1 to 2077 are written on the top sides of all sheets. What is the minimum k for which Bob is guaranteed to win?

3. Алиса и Боб играют в игру. На столе лежат k листов бумаги. Сначала Алиса пишет на каждом листе набор каких-то чисел от 1 до 1005 (на разных листах числа могут повторяться; также Алиса может не написать ни одного числа на каком-то листке или написать сразу все числа). Затем Алиса пишет на обратной стороне каждого листа все оставшиеся числа от 1 до 1005 (т.е. на каждом листе записаны все числа от 1 до 1005). Затем Боб переворачивает некоторые листы другой стороной вверх (он также может не перевернуть ни одного листа или пере- вернуть сразу все). Боб выигрывает, если на верхних сторонах всех листов будут записаны все числа от 1 до 1005. При каком наименьшем k Боб гарантированно сможет выиграть?

   Alice and Bob are playing a game. There are k sheets of paper on the table. First, Alice writes on each sheet a set of some numbers from 1 to 1005 (numbers can be repeated on different sheets; Alice can also leave an empty sheet or write all the numbers at once). Then Alice writes on the back of each sheet all the remaining numbers from 1 to 1005 (that is, each sheet contains all the numbers from 1 to 1005). Then Bob turns some of the sheets upside down (he can also turn none of the sheets, or turn them all over at once). Bob wins if all numbers from 1 to 1005 are written on the top sides of all sheets. What is the minimum k for which Bob is guaranteed to win?

4. Алиса и Боб играют в игру. На столе лежат k листов бумаги. Сначала Алиса пишет на каждом листе набор каких-то чисел от 1 до 5000 (на разных листах числа могут повторяться; также Алиса может не написать ни одного числа на каком-то листке или написать сразу все числа). Затем Алиса пишет на обратной стороне каждого листа все оставшиеся числа от 1 до 5000 (т.е. на каждом листе записаны все числа от 1 до 5000). Затем Боб переворачивает некоторые листы другой стороной вверх (он также может не перевернуть ни одного листа или пере- вернуть сразу все). Боб выигрывает, если на верхних сторонах всех листов будут записаны все числа от 1 до 5000. При каком наименьшем k Боб гарантированно сможет выиграть?

   Alice and Bob are playing a game. There are k sheets of paper on the table. First, Alice writes on each sheet a set of some numbers from 1 to 5000 (numbers can be repeated on different sheets; Alice can also leave an empty sheet or write all the numbers at once). Then Alice writes on the back of each sheet all the remaining numbers from 1 to 5000 (that is, each sheet contains all the numbers from 1 to 5000). Then Bob turns some of the sheets upside down (he can also turn none of the sheets, or turn them all over at once). Bob wins if all numbers from 1 to 5000 are written on the top sides of all sheets. What is the minimum k for which Bob is guaranteed to win?

Task 3.

1. На шахматной доске 6×6 расставлены ладьи так, что они бьют все черные клетки. Какое наибольшее возможное количество непобитых белых клеток может быть?

   Some chess rooks are placed on a 6×6 board so that they beat all the black cells. What is the largest possible number of unbeaten white cells?

2. На шахматной доске 8×8 расставлены ладьи так, что они бьют все черные клетки. Какое наибольшее возможное количество непобитых белых клеток может быть?

   Some chess rooks are placed on a 8×8 board so that they beat all the black cells. What is the largest possible number of unbeaten white cells?

3. На шахматной доске 10×10 расставлены ладьи так, что они бьют все черные клетки. Какое наибольшее возможное количество непобитых белых клеток может быть?

   Some chess rooks are placed on a 10×10 board so that they beat all the black cells. What is the largest possible number of unbeaten white cells?

4. На шахматной доске 12×12 расставлены ладьи так, что они бьют все черные клетки. Какое наибольшее возможное количество непобитых белых клеток может быть?

   Some chess rooks are placed on a 12×12 board so that they beat all the black cells. What is the largest possible number of unbeaten white cells?

Task 4.

1. Дана колода из 11 карт. Разрешается тасовать колоду следующими способами.
   1) Снять любое количество карт с верха колоды и не меняя их порядка положить под низ колоды.
   2) Снять 5 карт с верха колоды и не меняя их порядка положить в промежутки между оставшимися 6 картами.
   Какое количество различных положений карт в колоде можно получить, выполняя эти тасовки?

   A deck of 11 cards is given. It is allowed to shuffle the deck in the following ways.
   1) Remove any number of cards from the top of the deck and put them under the bottom of the deck without changing their order.
   2) Remove 5 cards from the top of the deck and put them in the gaps between the remaining 6 cards without changing their order.
   How many different positions of cards in the deck can be obtained by performing these shuffles?

2. Дана колода из 13 карт. Разрешается тасовать колоду следующими способами.
1) Снять любое количество карт с верха колоды и не меняя их порядка положить под низ колоды.
2) Снять 6 карт с верха колоды и не меняя их порядка положить в промежутки между оставшимися 7 картами.
Какое количество различных положений карт в колоде можно получить, выполняя эти тасовки?

A deck of 13 cards is given. It is allowed to shuffle the deck in the following ways.
1) Remove any number of cards from the top of the deck and put them under the bottom of the deck without changing their order.
2) Remove 6 cards from the top of the deck and put them in the gaps between the remaining 7 cards without changing their order.
How many different positions of cards in the deck can be obtained by performing these shuffles?

3. Дана колода из 15 карт. Разрешается тасовать колоду следующими способами.
1) Снять любое количество карт с верха колоды и не меняя их порядка положить под низ колоды.
2) Снять 7 карт с верха колоды и не меняя их порядка положить в промежутки между оставшимися 8 картами.
Какое количество различных положений карт в колоде можно получить, выполняя эти тасовки?

A deck of 15 cards is given. It is allowed to shuffle the deck in the following ways.
1) Remove any number of cards from the top of the deck and put them under the bottom of the deck without changing their order.
2) Remove 7 cards from the top of the deck and put them in the gaps between the remaining 8 cards without changing their order.
How many different positions of cards in the deck can be obtained by performing these shuffles?

4. Дана колода из 17 карт. Разрешается тасовать колоду следующими способами.
1) Снять любое количество карт с верха колоды и не меняя их порядка положить под низ колоды.
2) Снять 8 карт с верха колоды и не меняя их порядка положить в промежутки между оставшимися 9 картами.
Какое количество различных положений карт в колоде можно получить, выполняя эти тасовки?

A deck of 17 cards is given. It is allowed to shuffle the deck in the following ways.
1) Remove any number of cards from the top of the deck and put them under the bottom of the deck without changing their order.

2) Remove 8 cards from the top of the deck and put them in the gaps between the remaining 9 cards without changing their order.
How many different positions of cards in the deck can be obtained by performing these shuffles?

Task 5.

1. Муха села на верхнюю кромку цилиндрической кружки (без ручки) и поползла по её наружной стенке вниз под углом к вертикали и горизонтали. Оказалось, что весь свой путь до стола муха перемещалась с постоянными вертикальной и угловой скоростями (угловая скорость в данной ситуации измеряется в ортогональной проекции на поверхность стола относительно центра проекции кружки). Также оказалось, что муха совершила два полных оборота вокруг кружки и коснулась поверхности стола в точности под точкой, из которой свой путь начала. Натуралист Коля заинтересовался траекторией перемещения мухи и наклеил полосу липкой ленты ширины 2см поверх пути мухи так, что середина полосы идёт в точности по этому пути, обрезав эту полосу вдоль верхнего и нижнего краёв кружки. Определите площадь наклеенного куска липкой ленты, если высота кружки 7см, а радиус $4/\pi$ *см*.

   A fly landed on the upper edge of a cylindrical mug (without a handle) and crawled down its outer wall at an angle to the vertical and horizontal. It turned out that the fly moved all the way to the table with constant vertical and angular velocities (the angular velocity in this situation is measured in an orthogonal projection on the surface of the table relative to the center of the projection of the mug). It also turned out that the fly made two full turns around the mug and touched the surface of the table exactly under the point from which it started its journey. Naturalist Kolya became interested in the trajectory of the fly and pasted a strip of sticky tape width $2\ cm$ on top of the fly path so that the middle of the strip goes exactly along this path, cutting this strip along the upper and lower edges of the circle. Determine the area of the glued piece of sticky tape if the height of the circle is $7\ cm$, and the radius is $4/\pi\ cm$.

2. Муха села на верхнюю кромку цилиндрической кружки (без ручки) и поползла по её наружной стенке вниз под углом к вертикали и горизонтали. Оказалось, что весь свой путь до стола муха перемещалась с постоянными вертикальной и угловой скоростями (угловая скорость в данной ситуации измеряется в ортогональной проекции на поверхность стола относительно центра проекции кружки). Также оказалось, что муха совершила два полных оборота вокруг кружки и коснулась поверхности стола в точности под точкой, из которой свой путь начала. Натуралист Коля заинтересовался траекторией перемещения мухи и наклеил полосу липкой ленты ширины 3см поверх пути мухи так, что середина полосы идёт в

точности по этому пути, обрезав эту полосу вдоль верхнего и нижнего краёв кружки. Определите площадь наклеенного куска липкой ленты, если высота кружки 8*см*, а радиус $5/\pi$ *см*.

A fly landed on the upper edge of a cylindrical mug (without a handle) and crawled down its outer wall at an angle to the vertical and horizontal. It turned out that the fly moved all the way to the table with constant vertical and angular velocities (the angular velocity in this situation is measured in an orthogonal projection on the surface of the table relative to the center of the projection of the mug). It also turned out that the fly made two full turns around the mug and touched the surface of the table exactly under the point from which it started its journey. Naturalist Kolya became interested in the trajectory of the fly and pasted a strip of sticky tape width 3 *cm* on top of the fly path so that the middle of the strip goes exactly along this path, cutting this strip along the upper and lower edges of the circle. Determine the area of the glued piece of sticky tape if the height of the circle is 8 *cm*, and the radius is $5/\pi$ *cm*.

3. Муха села на верхнюю кромку цилиндрической кружки (без ручки) и поползла по её наружной стенке вниз под углом к вертикали и горизонтали. Оказалось, что весь свой путь до стола муха перемещалась с постоянными вертикальной и угловой скоростями (угловая скорость в данной ситуации измеряется в ортогональной проекции на поверхность стола относительно центра проекции кружки). Также оказалось, что муха совершила два полных оборота вокруг кружки и коснулась поверхности стола в точности под точкой, из которой свой путь начала. Натуралист Коля заинтересовался траекторией перемещения мухи и наклеил полосу липкой ленты ширины 4*см* поверх пути мухи так, что середина полосы идёт в точности по этому пути, обрезав эту полосу вдоль верхнего и нижнего краёв кружки. Определите площадь наклеенного куска липкой ленты, если высота кружки 5*см*, а радиус $2/\pi$ *см*.

   A fly landed on the upper edge of a cylindrical mug (without a handle) and crawled down its outer wall at an angle to the vertical and horizontal. It turned out that the fly moved all the way to the table with constant vertical and angular velocities (the angular velocity in this situation is measured in an orthogonal projection on the surface of the table relative to the center of the projection of the mug). It also turned out that the fly made two full turns around the mug and touched the surface of the table exactly under the point from which it started its journey. Naturalist Kolya became interested in the trajectory of the fly and pasted a strip of sticky tape width 2 *cm* on top of the fly path so that the middle of the strip goes exactly along this path, cutting this strip along the upper and lower edges of the circle. Determine the area of the glued piece of sticky tape if the height of the circle is 5 *cm*, and the radius is $2/\pi$ *cm*.

4. Муха села на верхнюю кромку цилиндрической кружки (без ручки) и поползла по её наружной стенке вниз под углом к вертикали и горизонтали. Оказалось, что весь свой путь до стола муха перемещалась с постоянными вертикальной и угловой скоростями (угловая скорость в данной ситуации измеряется в ортогональной проекции на поверхность стола относительно центра проекции кружки). Также оказалось, что муха совершила два полных оборота вокруг кружки и коснулась поверхности стола в точности под точкой, из которой свой путь начала. Натуралист Коля заинтересовался траекторией перемещения мухи и наклеил полосу липкой ленты ширины 3*см* поверх пути мухи так, что середина полосы идёт в точности по этому пути, обрезав эту полосу вдоль верхнего и нижнего краёв кружки. Определите площадь наклеенного куска липкой ленты, если высота кружки 7*см*, а радиус $3/\pi$ *см*.

   A fly landed on the upper edge of a cylindrical mug (without a handle) and crawled down its outer wall at an angle to the vertical and horizontal. It turned out that the fly moved all the way to the table with constant vertical and angular velocities (the angular velocity in this situation is measured in an orthogonal projection on the surface of the table relative to the center of the projection of the mug). It also turned out that the fly made two full turns around the mug and touched the surface of the table exactly under the point from which it started its journey. Naturalist Kolya became interested in the trajectory of the fly and pasted a strip of sticky tape width 3 cm on top of the fly path so that the middle of the strip goes exactly along this path, cutting this strip along the upper and lower edges of the circle. Determine the area of the glued piece of sticky tape if the height of the circle is 7 cm, and the radius is $3/\pi$ cm.

Task 6.

1. Функция f называется периодической, если она принимает хотя бы два различных значения, и найдется такое $p > 0$, что $f(x+p) = f(x)$ для любого x. При этом каждое такое число p называется периодом функции f.

   Существуют ли такие периодические функции g и h с периодами 1 и π соответственно, что $g+h$ – тоже периодическая функция?

   A function f is called periodic if it takes at least two different values and there exists $p > 0$ such that $f(x+p) = f(x)$ for any x. Each of the numbers p are called periods of the function f.

   Is it possible to construct functions g и h with periods 1 and π respectively such that $g+h$ is also a periodic function?

2. Функция f называется периодической, если она принимает хотя бы два различных значения, и найдется такое $p > 0$, что $f(x+p) = f(x)$ для любого x. При этом каждое такое число p называется периодом функции f.

   Существуют ли такие периодические функции g и h с периодами 3 и π соответственно, что $g-h$ – тоже периодическая функция?

   A function f is called periodic if it takes at least two different values and there exists $p > 0$ such that $f(x+p) = f(x)$ for any x. Each of the numbers p are called periods of the function f.

   Is it possible to construct functions g и h with periods 3 and π respectively such that $g-h$ is also a periodic function?

3. Функция f называется периодической, если она принимает хотя бы два различных значения, и найдется такое $p > 0$, что $f(x+p) = f(x)$ для любого x. При этом каждое такое число p называется периодом функции f.

Существуют ли такие периодические функции g и h с периодами 2 и $\pi/2$ соответственно, что $g+h$ – тоже периодическая функция?

A function f is called periodic if it takes at least two different values and there exists $p>0$ such that $f(x+p)=f(x)$ for any x. Each of the numbers p are called periods of the function f.

Is it possible to construct functions g и h with periods 2 and $\pi/2$ respectively such that $g+h$ is also a periodic function?

4. Функция f называется периодической, если она принимает хотя бы два различных значения, и найдется такое $p>0$, что $f(x+p)=f(x)$ для любого x. При этом каждое такое число p называется периодом функции f.

   Существуют ли такие периодические функции g и h с периодами 6 и 2π соответственно, что $g-h$ – тоже периодическая функция?

   A function f is called periodic if it takes at least two different values and there exists $p>0$ such that $f(x+p)=f(x)$ for any x. Each of the numbers p are called periods of the function f.

   Is it possible to construct functions g и h with periods 6 and 2π respectively such that $g-h$ is also a periodic function?