10-12th degree

Task 1. В пространстве даны четыре попарно неравных и попарно параллельных отрезка A_iB_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Докажите, что точки пересечения продолжений боковых сторон шести трапеций $A_iB_iA_jB_j$ $(1 \leq i < j \leq 4)$ лежат в одной плоскости.

In a space there are four pairwise unequal and pairwise parallel segments A_iB_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Prove that the intersection points of the extensions of the side edges of the six trapezoids $A_iB_iA_jB_j$ $(1 \leq i < j \leq 4)$ lie in the same plane.

Task 2. Натуральные числа вида $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ (десятичная запись состоит из n единиц) будем обозначать R_n. Докажите, что существует такое натуральное число k, что R_n делится на 41 тогда и только тогда, когда n делится на k.

Lets denote positive integers of the form $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ (the decimal notation consists of n digits «1») as R_n. Prove that there exists a positive integer k such that R_n is divisible by 41 if and only if n is divisible by k.

Task 3. Пусть a, b, c – взаимно простые в совокупности натуральные числа, и

$$D_n = (a + b + c, a^2 + b^2 + c^2, a^n + b^n + c^n).$$

Найдите все возможные значения D_n, где n – натуральное число, кратное 3.

Запись $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ обозначает наибольший общий делитель целых чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$.

*Целые числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ называются **взаимно простыми в совокупности**, если $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k) = 1$.*

Let a, b, c be mutually co-prime positive integers, and

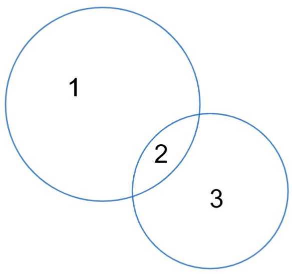
$$D_n = (a + b + c, a^2 + b^2 + c^2, a^n + b^n + c^n).$$

Find all possible values of D_n while n is a positive integer divisible by 3.

The notation $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ denotes the greatest common divisor of the integers $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$.

*Integers $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ are being called **mutually co-prime** if $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k) = 1$.*

Task 4. На плоскости нарисовано несколько окружностей, причем каждая пара окружностей пересекается ровно в двух точках, и никакие три окружности не имеют общей точки. *Круглосторонник* – это часть плоскости, со всех сторон ограниченная дугами этих окружностей, граница которой состоит из каких-то дуг этих окружностей, причем между любыми двумя внутренними точками круглосторонника можно пройти, не пересекая ни одной дуги данных окружностей.
Например, ниже изображены две окружности, образующие 3 *круглосторонника, обозначенные номерами* $1, 2$ *и* 3.

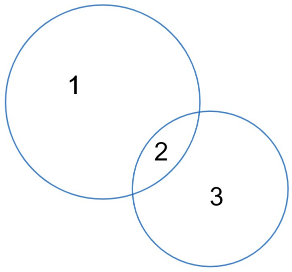


Смежные круглосторонники – это круглосторонники, имеющие общую дугу окружности в качестве границы, причем дуга должна быть невырожденной, то есть не сводящейся к одной точке.
Например, на рисунке выше смежными являются круглосторонники 1 *и* 2*,* 2 *и* 3*, но не* 1 *и* 3.

Для какого наименьшего $C \geq 2023$ можно нарисовать окружности так, что выполнены условия, перечисленные выше, и эти окружности образовывали ровно C круглосторонников?

Докажите, что для любого расположения нарисованных окружностей на плоскости, удовлетворяющих перечисленным условиям и образующих не менее 2023 круглосторонников, обязательно найдется круглосторонник, ограниченный менее чем 4-мя дугами.

Several circles are drawn on the plane, with each pair of the circles intersecting at two points, and no three circles have a common point. Let's call *round-gon* a part of a plane with its boundaries consisting of some arcs of these circles, such that it is possible to pass between any two internal points without crossing any of the arcs of these circles .
For example, below are two circles that form a 3 *round-gons labeled* $1, 2,$ *and* 3.



Adjacent round-gons are those having a common circular arc as a boundary, and the arc must be not be a single point.
For example, in the picture above the round-gons 1 *and* 2, 2 *and* 3 *are adjacent, but round-gons* 1 *and* 3 *are not adjacent.*

For what smallest $C \geq 2023$ can circles be drawn in such way that the conditions listed above are satisfied and these circles form exactly C round-gons?

Prove that for any arrangement of the circles on the plane that satisfies the conditions listed and forms at least 2023 round-gons, there must be a round-gon bounded by less than 4 circular arcs.

Task 5. *(задача предоставлена партнером Олимпиады – компанией «Тинькофф Образование»)* Назовём клетчатый квадрат, каждая клетка которого покрашена в чёрный или в жёлтый цвет, *гармоничным*, если в нём количество чёрных клеток отличается от количества жёлтых клеток не более чем на единицу. Сколькими способами можно раскрасить клетки таблицы 100×100 в чёрный и жёлтый цвета так, чтобы любой квадрат в этой таблице был гармоничным?

Let's call a square (with each of its cells being painted in either black or yellow) *harmonious*, if the number of black cells differs from the number of yellow cells by no more than 1. How many ways are there to paint a 100×100 table in black and yellow if any square in the table must be harmonious?