Каждый участник получает комплект из 6 задач, при этом каждая из них случайным образом выбирается из 4-х вариантов.
Первые 4 задачи подразумевают краткий ответ в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых. Задачи под номерами 5 и 6 требуют развернутого решения и (если это предусмотрено условием) ответа.

7^{th} degree

Task 1.

1. Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
   Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа A_n уже построено, то попробуем представить следующее число $(n+1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: его элементы – это все элементы A_n и, кроме того, множество, состоящее из всех элементов A_n.
   Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

   - $A_0 = \emptyset$;
   - $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
   - $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

   Сколько элементов содержит множество A_{24}?

   Ron Weasley grew up and realized that at Hogwarts he studied magic, but did not study mathematics. He began studying mathematics with the theory of sets and natural numbers (non-negative integers including the number 0). First of all, he thought about how to represent natural numbers as sets.
   Ron reasoned as follows: zero is naturally represented by the empty set $\emptyset$. Well, if for some integer $n \geq 0$ the representation of this number A_n has already been constructed, then we represent the next number $(n+1)$ by the set $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: its elements are all the elements of A_n with the set consisting of all the elements of A_n.
   Ron Weasley wrote out the representation of the first three (starting from 0) non-negative integers:

   - $A_0 = \emptyset$;
   - $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
   - $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

   How many elements does the set A_{24} contain?

2. Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
   Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа A_n

уже построено, то попробуем представить следующее число $(n+1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: его элементы – это все элементы A_n и, кроме того, множество, состоящее из всех элементов A_n.
Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Сколько элементов содержит множество A_{37}?

Ron Weasley grew up and realized that at Hogwarts he studied magic, but did not study mathematics. He began studying mathematics with the theory of sets and natural numbers (non-negative integers including the number 0). First of all, he thought about how to represent natural numbers as sets.
Ron reasoned as follows: zero is naturally represented by the empty set $\emptyset$. Well, if for some integer $n \geq 0$ the representation of this number A_n has already been constructed, then we represent the next number $(n+1)$ by the set $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: its elements are all the elements of A_n with the set consisting of all the elements of A_n.
Ron Weasley wrote out the representation of the first three (starting from 0) non-negative integers:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

How many elements does the set A_{37} contain?

3. Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа A_n уже построено, то попробуем представить следующее число $(n+1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: его элементы – это все элементы A_n и, кроме того, множество, состоящее из всех элементов A_n.
Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Сколько элементов содержит множество A_{42}?

Ron Weasley grew up and realized that at Hogwarts he studied magic, but did not study mathematics. He began studying mathematics with the theory of sets and natural numbers (non-negative integers including the number 0). First of all, he thought about how to represent natural numbers

as sets.
Ron reasoned as follows: zero is naturally represented by the empty set $\emptyset$. Well, if for some integer $n \geq 0$ the representation of this number A_n has already been constructed, then we represent the next number $(n+1)$ by the set $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: its elements are all the elements of A_n with the set consisting of all the elements of A_n.
Ron Weasley wrote out the representation of the first three (starting from 0) non-negative integers:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

How many elements does the set A_{42} contain?

4. Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа A_n уже построено, то попробуем представить следующее число $(n+1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: его элементы – это все элементы A_n и, кроме того, множество, состоящее из всех элементов A_n.
Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Сколько элементов содержит множество A_{77}?

Ron Weasley grew up and realized that at Hogwarts he studied magic, but did not study mathematics. He began studying mathematics with the theory of sets and natural numbers (non-negative integers including the number 0). First of all, he thought about how to represent natural numbers as sets.
Ron reasoned as follows: zero is naturally represented by the empty set $\emptyset$. Well, if for some integer $n \geq 0$ the representation of this number A_n has already been constructed, then we represent the next number $(n+1)$ by the set $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: its elements are all the elements of A_n with the set consisting of all the elements of A_n.
Ron Weasley wrote out the representation of the first three (starting from 0) non-negative integers:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

How many elements does the set A_{77} contain?

Task 2.

1. Зубной врач запретил Кате есть больше десяти конфет в день. Более того, если в какой-то день Катя съедает больше семи конфет, то в следующие два дня ей нельзя есть более пяти конфет в день. Какое максимальное количество конфет может съесть Катя за 25 дней, пока действуют ограничения врача?

   The dentist forbade Kate to eat more than ten sweets a day. Moreover, if one day Kate eats more than seven sweets, then in the next two days she can't eat more than five sweets a day. What is the maximum number of sweets Kate can eat in 25 days while the doctor's restrictions are in effect?

2. Зубной врач запретил Кате есть больше десяти конфет в день. Более того, если в какой-то день Катя съедает больше семи конфет, то в следующие два дня ей нельзя есть более пяти конфет в день. Какое максимальное количество конфет может съесть Катя за 32 дня, пока действуют ограничения врача?

   The dentist forbade Kate to eat more than ten sweets a day. Moreover, if one day Kate eats more than seven sweets, then in the next two days she can't eat more than five sweets a day. What is the maximum number of sweets Kate can eat in 32 days while the doctor's restrictions are in effect?

3. Зубной врач запретил Кате есть больше десяти конфет в день. Более того, если в какой-то день Катя съедает больше семи конфет, то в следующие два дня ей нельзя есть более пяти конфет в день. Какое максимальное количество конфет может съесть Катя за 39 дней, пока действуют ограничения врача?

   The dentist forbade Kate to eat more than ten sweets a day. Moreover, if one day Kate eats more than seven sweets, then in the next two days she can't eat more than five sweets a day. What is the maximum number of sweets Kate can eat in 39 days while the doctor's restrictions are in effect?

4. Зубной врач запретил Кате есть больше десяти конфет в день. Более того, если в какой-то день Катя съедает больше семи конфет, то в следующие два дня ей нельзя есть более пяти конфет в день. Какое максимальное количество конфет может съесть Катя за 45 дней, пока действуют ограничения врача?

   The dentist forbade Kate to eat more than ten sweets a day. Moreover, if one day Kate eats more than seven sweets, then in the next two days she can't eat more than five sweets a day. What is the maximum number of sweets Kate can eat in 45 days while the doctor's restrictions are in effect?

Task 3.

1. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $3N+2$ конфеты. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с двух конфет и успел произнести заклинание 14 раз?

   Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $3N+2$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with two candies and managed to cast the spell 14 times?

2. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $5N+4$ конфеты. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с четырех конфет и успел произнести заклинание 9 раз?

   Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $5N+4$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with four candies and managed to cast the spell 9 times?

3. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $4N+3$ конфеты. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с трех конфет и успел произнести заклинание 11 раз?

   Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $4N+3$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with three candies and managed to cast the spell 11 times?

4. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $6N+5$ конфет. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с пяти конфет и успел произнести заклинание 8 раз?

   Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $6N+5$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with five candies and managed to cast the spell 8 times?

Task 4.

1. Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 6 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью v. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d>0$. Найдите наименьшее d, при котором все трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

   Alex, his dad and his grandfather are walking in a park along a round path 6 km long. Alex is cycling at a speed of $5v$, his dad is jogging at a speed of $2v$, and his grandfather is walking at a speed of v. Alex and his dad started their walk at the same time from the same «Start» point, and grandfather at that moment was behind them by a distance of $d>0$. Find the smallest d for which all three – Alex, his dad and his grandfather – will meet at one point. Express the answer in kilometers.

2. Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 9 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью v. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее d, при котором все трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

   Alex, his dad and his grandfather are walking in a park along a round path 9 km long. Alex is cycling at a speed of $5v$, his dad is jogging at a speed of $2v$, and his grandfather is walking at a speed of v. Alex and his dad started their walk at the same time from the same «Start» point, and grandfather at that moment was behind them by a distance of $d > 0$. Find the smallest d for which all three – Alex, his dad and his grandfather – will meet at one point. Express the answer in kilometers.

3. Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 4.5 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью v. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее d, при котором все трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

   Alex, his dad and his grandfather are walking in a park along a round path 4.5 km long. Alex is cycling at a speed of $5v$, his dad is jogging at a speed of $2v$, and his grandfather is walking at a speed of v. Alex and his dad started their walk at the same time from the same «Start» point, and grandfather at that moment was behind them by a distance of $d > 0$. Find the smallest d for which all three – Alex, his dad and his grandfather – will meet at one point. Express the answer in kilometers.

4. Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 7.5 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью v. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее d, при котором все трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

   Alex, his dad and his grandfather are walking in a park along a round path 7.5 km long. Alex is cycling at a speed of $5v$, his dad is jogging at a speed of $2v$, and his grandfather is walking at a speed of v. Alex and his dad started their walk at the same time from the same «Start» point, and grandfather at that moment was behind them by a distance of $d > 0$. Find the smallest d for which all three – Alex, his dad and his grandfather – will meet at one point. Express the answer in kilometers.

Task 5.

1. Для того, чтобы развести костёр, хоббитам необходимы кремень, кресало и трут. Перед походом компания из 11 юных хоббитов закупила по 6 штук кремней, кресал и коробочек с трутом и разложила их как попало по своим рюкзакам – известно лишь, что в каждый рюкзак не могло попасть более одного предмета каждого вида (кремня, кресала или трута), но по одному каждого вида – могли. Тёмной ночью хоббиты случайно разделились на 2 группы. Докажите, что хотя бы одна из групп сможет развести костёр и послать сигнал другой.

   To set up a bonfire, hobbits need flint, steel and tinder. Before traveling, a group of 11 hobbits bought 6 pieces of flint, steel and tinder and randomly put them into the backpacks. It is known, that each backpack can have no more than one item of each class. During the dark night hobbits were randomly divided into two groups. Prove that at least one of groups can set up a bonfire and send a signal to another one.

2. Для того, чтобы развести костёр, хоббитам необходимы кремень, кресало и трут. Перед походом компания из 14 юных хоббитов закупила по 8 штук кремней, кресал и коробочек с трутом и разложила их как попало по своим рюкзакам – известно лишь, что в каждый рюкзак не могло попасть более одного предмета каждого вида (кремня, кресала или трута), но по одному каждого вида – могли. Тёмной ночью хоббиты случайно разделились на 2 группы.

Докажите, что хотя бы одна из групп сможет развести костёр и послать сигнал другой.

To set up a bonfire, hobbits need flint, steel and tinder. Before traveling, a group of 14 hobbits bought 8 pieces of flint, steel and tinder and randomly put them into the backpacks. It is known, that each backpack can have no more than one item of each class. During the dark night hobbits were randomly divided into two groups. Prove that at least one of groups can set up a bonfire and send a signal to another one.

3. Для того, чтобы развести костёр, хоббитам необходимы кремень, кресало и трут. Перед походом компания из 17 юных хоббитов закупила по 9 штук кремней, кресал и коробочек с трутом и разложила их как попало по своим рюкзакам – известно лишь, что в каждый рюкзак не могло попасть более одного предмета каждого вида (кремня, кресала или трута), но по одному каждого вида – могли. Тёмной ночью хоббиты случайно разделились на 2 группы. Докажите, что хотя бы одна из групп сможет развести костёр и послать сигнал другой.

   To set up a bonfire, hobbits need flint, steel and tinder. Before traveling, a group of 17 hobbits bought 9 pieces of flint, steel and tinder and randomly put them into the backpacks. It is known, that each backpack can have no more than one item of each class. During the dark night hobbits were randomly divided into two groups. Prove that at least one of groups can set up a bonfire and send a signal to another one.

4. Для того, чтобы развести костёр, хоббитам необходимы кремень, кресало и трут. Перед походом компания из 20 юных хоббитов закупила по 11 штук кремней, кресал и коробочек с трутом и разложила их как попало по своим рюкзакам – известно лишь, что в каждый рюкзак не могло попасть более одного предмета каждого вида (кремня, кресала или трута), но по одному каждого вида – могли. Тёмной ночью хоббиты случайно разделились на 2 группы. Докажите, что хотя бы одна из групп сможет развести костёр и послать сигнал другой.

   To set up a bonfire, hobbits need flint, steel and tinder. Before traveling, a group of 20 hobbits bought 11 pieces of flint, steel and tinder and randomly put them into the backpacks. It is known, that each backpack can have no more than one item of each class. During the dark night hobbits were randomly divided into two groups. Prove that at least one of groups can set up a bonfire and send a signal to another one.

Task 6.

1. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 7×7 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

   Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1, 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 7×7. Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

2. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 10×10 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

   Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1, 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 10×10. Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

3. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 9×9 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

   Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1, 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 9×9. Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

4. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 8×8 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

   Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1, 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 8×8. Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?