Каждый участник получает комплект из 6 задач, при этом каждая из них случайным образом выбирается из 4-х вариантов. Представлены решения для одного из четырех вариантов, остальные решаются аналогично.

Первые 4 задачи подразумевают краткий числовой ответ. Если число в ответе имеет больше двух цифр после десятичной запятой, то это число требуется округлить до сотых. Задачи под номерами 5 и 6 требуют развернутого решения и точного (т.е. без округлений) ответа.

Each participant gets a set of 6 tasks, with each of them randomly selected from 4 versions. Solutions are presented for one of the four versions, the rest are solved similarly.

The first 4 tasks imply a short numerical answer. If the number in the answer has more than two digits after the decimal point, then this number must be rounded to 2 decimal digits. Tasks numbered 5 and 6 require a detailed solution and an precise (i.e. without rounding) answer.

7^{th} degree

Task 1.

1. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

   Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 99 пиратов, то доля капитана в таком случае составит 51 монета; а если же он выберет 77 пиратов, то его доля будет уже 29 монет. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 1000?

   Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

   Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 99 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 51 coins; and if he chooses 77 pirates, the captain's share will be 29 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 1000?

2. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

   Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 81 пирата, то доля капитана в таком случае составит 64 монет; а если же он выберет 99 пиратов, то его доля будет уже 19 монет. Известно, что число монет меньше 800. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 800?

   Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 81 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 64 coins; and if he chooses 99 pirates, the captain's share will be 19 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 800?

3. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

   Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 143 пирата, то доля капитана в таком случае составит 61 монета; а если же он выберет 88 пиратов, то его доля будет уже 39 монет. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 1400?

   Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

   Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 143 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 61 coins; and if he chooses 88 pirates, the captain's share will be 39 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 1400?

4. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

   Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 91 пират, то доля капитана в таком случае составит 87 монет; а если же он выберет 77 пиратов, то его доля будет уже 17 монет. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 950?

   Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

   Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 91 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 87 coins; and if he chooses 77 pirates, the captain's share will be 17 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 950?

Task 2.

1. Клетчатую таблицу размером 6×6 вырезали из листа бумаги и склеили у нее противоположные стороны. Какое максимально возможное количество коней можно расставить на такой доске, чтобы никакие два коня не били друг друга?

   A 6×6 checkered table was cut out of a sheet of paper and its opposite sides were glued together. What is the maximum possible number of chess knights that can be placed on such a board so that no two knights beat each other?

2. Клетчатую таблицу размером 8×8 вырезали из листа бумаги и склеили у нее противоположные стороны. Какое максимально возможное количество коней можно расставить на такой доске, чтобы никакие два коня не били друг друга?

   A 8×8 checkered table was cut out of a sheet of paper and its opposite sides were glued together. What is the maximum possible number of chess knights that can be placed on such a board so that no two knights beat each other?

3. Клетчатую таблицу размером 10×10 вырезали из листа бумаги и склеили у нее противоположные стороны. Какое максимально возможное количество коней можно расставить на

такой доске, чтобы никакие два коня не били друг друга?

A 10×10 checkered table was cut out of a sheet of paper and its opposite sides were glued together. What is the maximum possible number of chess knights that can be placed on such a board so that no two knights beat each other?

4. Клетчатую таблицу размером 12×12 вырезали из листа бумаги и склеили у нее противоположные стороны. Какое максимально возможное количество коней можно расставить на такой доске, чтобы никакие два коня не били друг друга?

   A 12×12 checkered table was cut out of a sheet of paper and its opposite sides were glued together. What is the maximum possible number of chess knights that can be placed on such a board so that no two knights beat each other?

Task 3.

1. В стране несколько городов, некоторые пары которых соединены дорогам. Известно, что всего 2025 дорог, и из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Какое максимальное количество дорог, никакие две из которых не выходят из одного города, гарантированно можно найти?

   There are several towns in a kingdom, some pairs of which are connected via roads. It is known that there are 2025 roads total and in any group of three roads you can choose two, which do not come from the same town. What is the largest number of roads are guaranteed to be found, no two of which come from the same towns?

2. В стране несколько городов, некоторые пары которых соединены дорогам. Известно, что всего 2000 дорог, и из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного

города. Какое максимальное количество дорог, никакие две из которых не выходят из одного города, гарантированно можно найти?

There are several towns in a kingdom, some pairs of which are connected via roads. It is known that there are 2000 roads total and in any group of three roads you can choose two, which do not come from the same town. What is the largest number of roads are guaranteed to be found, no two of which come from the same towns?

3. В стране несколько городов, некоторые пары которых соединены дорогам. Известно, что всего 1915 дорог, и из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Какое максимальное количество дорог, никакие две из которых не выходят из одного города, гарантированно можно найти?

   There are several towns in a kingdom, some pairs of which are connected via roads. It is known that there are 1915 roads total and in any group of three roads you can choose two, which do not come from the same town. What is the largest number of roads are guaranteed to be found, no two of which come from the same towns?

4. В стране несколько городов, некоторые пары которых соединены дорогам. Известно, что всего 1875 дорог, и из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Какое максимальное количество дорог, никакие две из которых не выходят из одного города, гарантированно можно найти?

   There are several towns in a kingdom, some pairs of which are connected via roads. It is known that there are 1875 roads total and in any group of three roads you can choose two, which do not come from the same town. What is the largest number of roads are guaranteed to be found, no two of which come from the same towns?

Task 4.

1. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $n^7 - n$ для любого натурального n.

   Find greatest common factor for all numbers of type $n^7 - n$ for any positive integer n.

2. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $n^{13} - n$ для любого натурального n.

   Find greatest common factor for all numbers of type $n^{13} - n$ for any positive integer n.

3. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $n^{19} - n$ для любого натурального n.

   Find greatest common factor for all numbers of type $n^{19} - n$ for any positive integer n.

4. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $n^{25} - n$ для любого натурального n.

   Find greatest common factor for all numbers of type $n^{25} - n$ for any positive integer n.

Task 5.

1. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 2022, образуя одно огромное число: 1234567891011...20212022. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

   On a tape all positive integers from 1 to 2022 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...20212022. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3, then Ivan wins, otherwise, Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

2. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 1999, образуя одно огромное число: 1234567891011...19981999. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

   On a tape all positive integers from 1 to 1999 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...19981999. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3, then Ivan wins, otherwise, Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

3. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 2077, образуя одно огромное число: 1234567891011...20762077. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

   On a tape all positive integers from 1 to 2077 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...20762077. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3, then Ivan wins, otherwise, Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

4. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 2007, образуя одно огромное число: 1234567891011...20062007. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

   On a tape all positive integers from 1 to 2007 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...20062007. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3, then Ivan wins, otherwise, Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

Task 6.

1. Алиса и Боб играют в игру. Игровое поле представляет из себя клетчатую полоску размером 1×2022. Игроки по очереди (начинает Алиса) выписывают в пустую клетку любую из букв О и Г. Побеждает тот, после чьего хода в трех соседних клетках появятся буквы ОГО. Если все клетки заполнены, а слова ОГО нет, игра заканчивается вничью. Каков будет исход при правильной игре обоих соперников?

   Alice and Bob play a game. The gaming field is a checked line of size 1×2022. Players one by one write any of the letters W or O (the first to write is Alice). The person after which turn there would be a work WOW on the desk wins. If all cells are filled without WOW word, the players draw. How the game would end with a optimal play of both players?

2. Алиса и Боб играют в игру. Игровое поле представляет из себя клетчатую полоску размером 1×1111. Игроки по очереди (начинает Алиса) выписывают в пустую клетку любую из букв О и Г. Побеждает тот, после чьего хода в трех соседних клетках появятся буквы ОГО. Если все клетки заполнены, а слова ОГО нет, игра заканчивается вничью. Каков будет исход при правильной игре обоих соперников?

   Alice and Bob play a game. The gaming field is a checked line of size 1×1111. Players one by one write any of the letters W or O (the first to write is Alice). The person after which turn there would be a work WOW on the desk wins. If all cells are filled without WOW word, the players draw. How the game would end with a optimal play of both players?

3. Алиса и Боб играют в игру. Игровое поле представляет из себя клетчатую полоску размером 1×2048. Игроки по очереди (начинает Алиса) выписывают в пустую клетку любую из букв О и Г. Побеждает тот, после чьего хода в трех соседних клетках появятся буквы ОГО. Если все клетки заполнены, а слова ОГО нет, игра заканчивается вничью. Каков будет исход при

правильной игре обоих соперников?

Alice and Bob play a game. The gaming field is a checked line of size 1×2048. Players one by one write any of the letters W or O (the first to write is Alice). The person after which turn there would be a work WOW on the desk wins. If all cells are filled without WOW word, the players draw. How the game would end with a optimal play of both players?

4. Алиса и Боб играют в игру. Игровое поле представляет из себя клетчатую полоску размером 1×777. Игроки по очереди (начинает Алиса) выписывают в пустую клетку любую из букв О и Г. Побеждает тот, после чьего хода в трех соседних клетках появятся буквы ОГО. Если все клетки заполнены, а слова ОГО нет, игра заканчивается вничью. Каков будет исход при правильной игре обоих соперников?

   Alice and Bob play a game. The gaming field is a checked line of size 1×777. Players one by one write any of the letters W or O (the first to write is Alice). The person after which turn there would be a work WOW on the desk wins. If all cells are filled without WOW word, the players draw. How the game would end with a optimal play of both players?