7^{th} degree

Task 1. Катя хочет покрасить стены своей шестиугольной комнаты в голубой, желтый, зеленый, красный, синий и оранжевый цвета (каждую стену в свой цвет), причем голубая стена должна соседствовать с желтой, а зеленая не должна соседствовать с синей. Сколько существует различных способов покрасить стены комнаты с соблюдением этих правил? Покраски, совпадающие друг с другом при повороте комнаты, считаются одинаковыми.

Kate wants to paint the walls of her hexagonal room in light-blue, yellow, green, red, blue and orange (each wall in a different color), where the light-blue wall should be adjacent to the yellow one, and the green wall should not be adjacent to the blue one. How many different ways are there to paint the walls of the room while following these rules? Paintings that coincide with each other when the room is rotated are considered to be the same.

Task 2. Рассмотрим следующий алгоритм. На каждом шаге мы берем текущее натуральное число, раскладываем его в сумму каких-то двух натуральных слагаемых (эти слагаемые на каждом шаге мы можем выбирать как угодно), а затем перемножаем эти два слагаемых и получаем новое число. Назовем число n *волшебным*, если, запустив алгоритм с числа, равного сумме цифр десятичной записи n, мы в какой-то момент времени можем получить число n.

Например, число 35 *волшебное, поскольку сумма его цифр равна* 8, *и алгоритм работает так:*

$$8 = 6 + 2 \to 6 \cdot 2 = 12 = 7 + 5 \to 7 \cdot 5 = 35$$

Является ли волшебным число 2023?

Consider the following algorithm. At every its step we represent the current positive integer as a sum of two positive integers chosen by our will, then we multiply these two numbers and get a new number. Lets call a number n *magical* if we can get n by launching the algorithm from the sum of decimal digits of n.

For example, the number 35 *is magical, since the sum of its digits is* 8, *and the algorithm works as follows:*

$$8 = 6 + 2 \to 6 \cdot 2 = 12 = 7 + 5 \to 7 \cdot 5 = 35$$

Is the number 2023 magical?

Task 3. По кругу расставлены 2024 контейнера, в каждом из которых изначально находится по одному шарику. Робот умеет брать два любых шарика и перекладывать их в соседние с ними контейнеры, но при этом один шарик должен быть переложен в соседний контейнер справа, а другой – в соседний контейнер слева.

Например, можно взять шарики из контейнеров с порядковыми номерами 134 *и* 960 *и переложить из них шарики в контейнеры с номерами* 135 *и* 959 *соответственно.*

Можно ли написать для робота такую программу, что в результате ее работы

a) останется 8 контейнеров, в каждом из которых по 253 шарика;

b) останется 253 контейнера, в каждом из которых по 8 шариков?

2024 containers are arranged in a circle, each of them initially contains one ball. Robot can take any two balls and transfer them to the containers adjacent to them, but in this case one ball must be transferred to the adjacent container on the right, and the other – to the adjacent container on the left.

For example, you can take balls from containers with numbers 134 *and* 960 *and put them into containers with numbers* 135 *and* 959*, respectively.*

Is it possible to program the robot such that as a result of its work

a) 8 containers will remain, each containing 253 balls;

b) 253 containers left, each with 8 balls?

Task 4. *(задача предоставлена партнером Олимпиады – компанией «Тинькофф Образование»)* Аналитик приехал на конференцию. Там он узнал, что среди 190 других участников конференции 50 всегда говорят правду, 100 всегда лгут, а 40 могут говорить что угодно. Все, кроме аналитика, знают всё про всех остальных: кто всегда говорит правду, кто всегда лжёт, а кто может говорить что угодно.

Докажите, что, пообщавшись со всеми участниками конференции, аналитик гарантированно сможет выяснить, кто кем является.

The analyst came to a conference. There he learned that among 190 others participants 50 always tell the truth, 100 always lie, and 40 can say either truth or lie. Everyone except the analyst knows everything about everyone else: who always tells the truth, who always lies, and who can say anything.

Prove that after talking with all the participants of the conference the analyst is guaranteed to find out who is who.

Task 5. Андрей загадал натуральное число k, а Виктор каким-то образом выписал на доску все натуральные числа, не содержащие в десятичной записи цифру 0. Затем Андрей огласил значение k, и Виктор вместо каждого записанного на доске числа n записал разность между суммой цифр числа n и суммой цифр числа kn (и там, и там говорится о сумме цифр десятичной записи числа).

Докажите, что теперь на доске записано бесконечно много нулей.

Andrew thought of a positive integer k, and Victor somehow wrote down on the board all positive integers that do not contain the digit 0 in their decimal notation. Then Andrew announced the value of k, and instead of each number n written on the board, Victor wrote down the difference between the sum of decimal digits of the number n and the sum of decimal digits of the number kn.

Prove that now there are infinitely many zeros written on the board.