

8-9 degree

Task 1.

1. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $3N + 2$ конфеты. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с двух конфет и успел произнести заклинание 14 раз?

Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $3N + 2$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with two candies and managed to cast the spell 14 times?

2. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $5N + 4$ конфеты. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с четырех конфет и успел произнести заклинание 9 раз?

Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $5N + 4$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with four candies and managed to cast the spell 9 times?

3. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $4N + 3$ конфеты. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с трех конфет и успел произнести заклинание 11 раз?

Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $4N + 3$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with three candies and managed to cast the spell 11 times?

4. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $6N + 5$ конфет. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с пяти конфет и успел произнести заклинание 8 раз?

Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $6N + 5$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with five candies and managed to cast the spell 8 times?

Task 2.

1. В каждую клетку таблицы 100×100 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 100, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 200, и так далее – в k -ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k, 2k, 3k, \dots, 100k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

Each cell of the table 100×100 has a number: the first row has all positive integers from 1 to 100 in ascending order, the second row has all the even numbers from 2 to 200, and further on – k -th line has numbers $k, 2k, 3k, \dots, 100k$ in ascending order. Let's consider the diagonal from the bottom left corner to the upper right. Find the largest number it contains.

2. В каждую клетку таблицы 200×200 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 200, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 400, и так далее – в k -ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k, 2k, 3k, \dots, 200k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

Each cell of the table 200×200 has a number: the first row has all positive integers from 1 to 200 in ascending order, the second row has all the even numbers from 2 to 400, and further on – k -th line has numbers $k, 2k, 3k, \dots, 200k$ in ascending order. Let's consider the diagonal from the bottom left corner to the upper right. Find the largest number it contains.

3. В каждую клетку таблицы 150×150 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 150, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 300, и так далее – в k -ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k, 2k, 3k, \dots, 150k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

Each cell of the table 150×150 has a number: the first row has all positive integers from 1 to 150 in ascending order, the second row has all the even numbers from 2 to 300, and further on – k -th line has numbers $k, 2k, 3k, \dots, 150k$ in ascending order. Let's consider the diagonal from the bottom left corner to the upper right. Find the largest number it contains.

4. В каждую клетку таблицы 250×250 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 250, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 500, и так далее – в k -ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k, 2k, 3k, \dots, 250k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

Each cell of the table 250×250 has a number: the first row has all positive integers from 1 to 250 in ascending order, the second row has all the even numbers from 2 to 500, and further on – k -th line has numbers $k, 2k, 3k, \dots, 250k$ in ascending order. Let's consider the diagonal from the bottom left corner to the upper right. Find the largest number it contains.

Task 3.

1. Треугольник AOB – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB . Точки C и D расположены на отрезках AO, OB соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику COD , причем точки A, C_1, D_1 лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 12, CD = 7$.

Triangle AOB is an isosceles right triangle with hypotenuse AB . The points C and D are located on the segments AO, OB , respectively, so that $CD \parallel AB$. $\triangle C_1OD_1$ constructed being equal to triangle COD , moreover, points A, C_1, D_1 lie on one straight line in the specified order. Calculate the area of $\triangle AD_1B$ while $AB = 12, CD = 7$.

2. Треугольник AOB – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB . Точки C и D расположены на отрезках AO, OB соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику COD , причем точки A, C_1, D_1 лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 10, CD = 9$.

Triangle AOB is an isosceles right triangle with hypotenuse AB . The points C and D are located on the segments AO, OB , respectively, so that $CD \parallel AB$. $\triangle C_1OD_1$ constructed being equal to triangle COD , moreover, points A, C_1, D_1 lie on one straight line in the specified order. Calculate the area of $\triangle AD_1B$ while $AB = 10, CD = 9$.

3. Треугольник AOB – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB . Точки C и D расположены на отрезках AO, OB соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику COD , причем точки A, C_1, D_1 лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 15, CD = 4$.

Triangle AOB is an isosceles right triangle with hypotenuse AB . The points C and D are located on the segments AO, OB , respectively, so that $CD \parallel AB$. $\triangle C_1OD_1$ constructed being equal to triangle COD , moreover, points A, C_1, D_1 lie on one straight line in the specified order. Calculate the area of $\triangle AD_1B$ while $AB = 15, CD = 4$.

4. Треугольник AOB – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB . Точки C и D расположены на отрезках AO, OB соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику COD , причем точки A, C_1, D_1 лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 16, CD = 13$.

Triangle AOB is an isosceles right triangle with hypotenuse AB . The points C and D are located on the segments AO, OB , respectively, so that $CD \parallel AB$. $\triangle C_1OD_1$ constructed being equal to triangle COD , moreover, points A, C_1, D_1 lie on one straight line in the specified order. Calculate the area of $\triangle AD_1B$ while $AB = 16, CD = 13$.

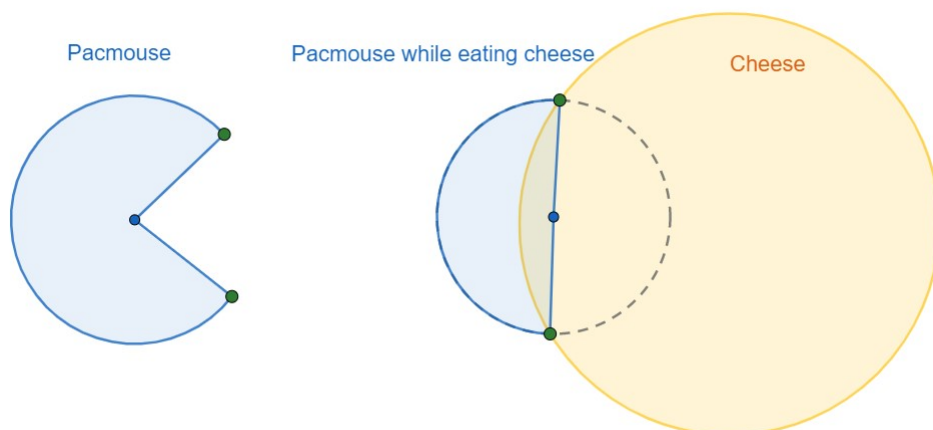
Task 4.

1. Пакмыши живут на плоскости и едят круглые сыры. Форма пакмыши (см. рисунок) – круг: когда пакмышья ест, ровно половину этого круга составляют страшные зубастые челюсти. Пакмышья может откусить все, что в неё войдёт. Пакмышья всегда честная (в команде она откусывает поровну с другими пакмышьями) и рациональная (откусывает самый большой из возможных кусков и знает, как это сделать). Пакмышья наелась, если откусила от сыра столько, сколько может откусить от него в одиночку.

Две одинаковые пакмышья нашли круглый сыр диаметра 6 и кусают его одновременно один раз. Найдите наименьшую возможную площадь оставшегося куска сыра, если известно, что пакмышья наелись.

Pacmouses live on a plane and eat round cheeses. Shape of a pacmouse (see picture) is a circle: when the pacmouse eats, exactly half of this circle is made up of terrible toothy jaws, and pacmouse can bite off everything that enters it. Pacmouse is always honest (in a team, it bites off equally with other pacmouses) and rational (bites off the largest possible piece and knows how to do it). Pacmouse is well-fed if it bit off as much cheese as it could bite off eating alone.

Two identical pacmouses found a round cheese with the diameter 6 and bite it once at the same time. Find the smallest possible area of the remaining piece of cheese if it is known that the pacmouses are well-fed.

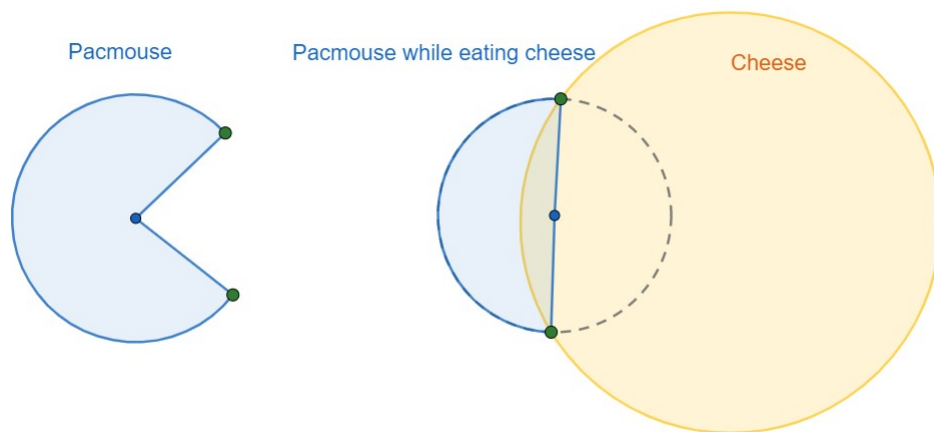


2. Пакмыши живут на плоскости и едят круглые сыры. Форма пакмыши (см. рисунок) – круг: когда пакмышья ест, ровно половину этого круга составляют страшные зубастые челюсти. Пакмышья может откусить все, что в неё войдёт. Пакмышья всегда честная (в команде она откусывает поровну с другими пакмышьями) и рациональная (откусывает самый большой из возможных кусков и знает, как это сделать). Пакмышья наелась, если откусила от сыра столько, сколько может откусить от него в одиночку.

Две одинаковые пакмышья нашли круглый сыр диаметра 10 и кусают его одновременно один раз. Найдите наименьшую возможную площадь оставшегося куска сыра, если известно, что пакмышья наелись.

Pacmouses live on a plane and eat round cheeses. Shape of a pacmouse (see picture) is a circle: when the pacmouse eats, exactly half of this circle is made up of terrible toothy jaws, and pacmouse can bite off everything that enters it. Pacmouse is always honest (in a team, it bites off equally with other pacmouses) and rational (bites off the largest possible piece and knows how to do it). Pacmouse is well-fed if it bit off as much cheese as it could bite off eating alone.

Two identical pacmouses found a round cheese with the diameter 10 and bite it once at the same time. Find the smallest possible area of the remaining piece of cheese if it is known that the pacmouses are well-fed.

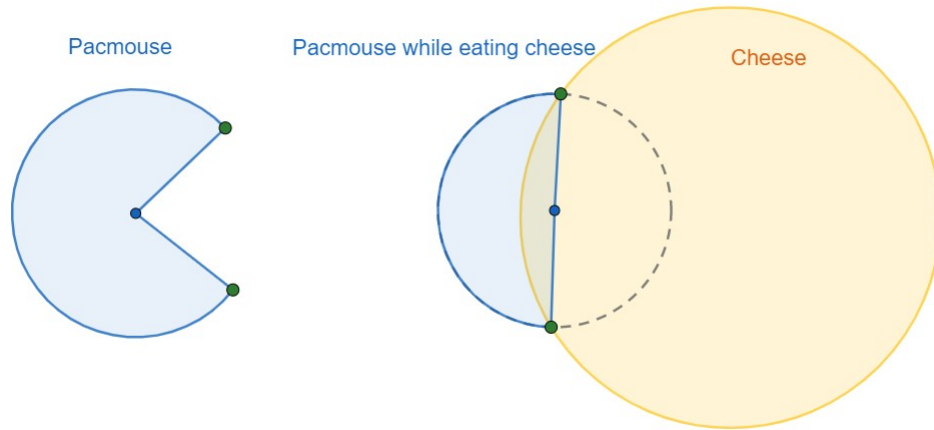


3. Пакмыши живут на плоскости и едят круглые сыры. Форма пакмыши (см. рисунок) – круг: когда пакмышья ест, ровно половину этого круга составляют страшные зубастые челюсти. Пакмышья может откусить все, что в неё войдёт. Пакмышья всегда честная (в команде она откусывает поровну с другими пакмышьями) и рациональная (откусывает самый большой из возможных кусков и знает, как это сделать). Пакмышья наелась, если откусила от сыра столько, сколько может откусить от него в одиночку.

Две одинаковые пакмышья нашли круглый сыр диаметра 12 и кусают его одновременно один раз. Найдите наименьшую возможную площадь оставшегося куска сыра, если известно, что пакмышья наелись.

Pacmouses live on a plane and eat round cheeses. Shape of a pacmouse (see picture) is a circle: when the pacmouse eats, exactly half of this circle is made up of terrible toothy jaws, and pacmouse

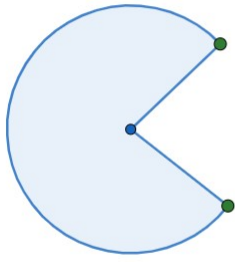
can bite off everything that enters it. Pacmouse is always honest (in a team, it bites off equally with other pacmouses) and rational (bites off the largest possible piece and knows how to do it). Pacmouse is well-fed if it bit off as much cheese as it could bite off eating alone. Two identical pacmouses found a round cheese with the diameter 12 and bite it once at the same time. Find the smallest possible area of the remaining piece of cheese if it is known that the pacmouses are well-fed.



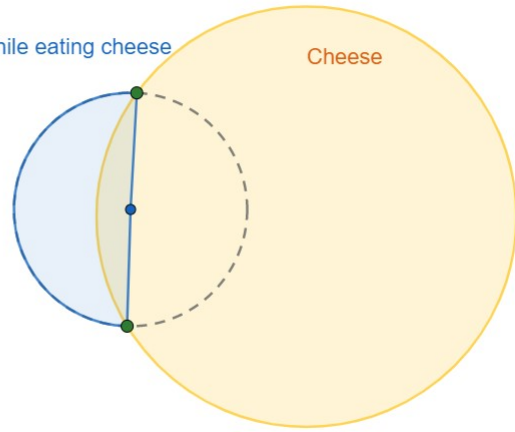
4. Пакмыши живут на плоскости и едят круглые сыры. Форма пакмыши (см. рисунок) – круг: когда пакмышь ест, ровно половину этого круга составляют страшные зубастые челюсти. Пакмышь может откусить все, что в неё войдёт. Пакмышь всегда честная (в команде она откусывает поровну с другими пакмышами) и рациональная (откусывает самый большой из возможных кусков и знает, как это сделать). Пакмышь наелась, если откусила от сыра столько, сколько может откусить от него в одиночку. Две одинаковые пакмыши нашли круглый сыр диаметра 8 и кусают его одновременно один раз. Найдите наименьшую возможную площадь оставшегося куска сыра, если известно, что пакмыши наелись.

Pacmouses live on a plane and eat round cheeses. Shape of a pacmouse (see picture) is a circle: when the pacmouse eats, exactly half of this circle is made up of terrible toothy jaws, and pacmouse can bite off everything that enters it. Pacmouse is always honest (in a team, it bites off equally with other pacmouses) and rational (bites off the largest possible piece and knows how to do it). Pacmouse is well-fed if it bit off as much cheese as it could bite off eating alone. Two identical pacmouses found a round cheese with the diameter 8 and bite it once at the same time. Find the smallest possible area of the remaining piece of cheese if it is known that the pacmouses are well-fed.

Pacmouse



Pacmouse while eating cheese



Task 5.

1. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 7×7 по клеточкам прямоугольники размера 1×1 , 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1 , 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 7×7 . Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

2. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 10×10 по клеточкам прямоугольники размера 1×1 , 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1 , 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 10×10 . Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

3. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 9×9 по клеточкам прямоугольники размера 1×1 , 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1 , 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 9×9 . Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

4. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 8×8 по клеточкам прямоугольники размера 1×1 , 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1 , 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 8×8 . Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

Task 6.

1. Последовательность многочленов $P_n(x)$, где $n \geq 0$ – целое число, задана рекуррентно: $P_0(x)$ тождественно равен единице (то есть $P_0(x) \equiv 1$), и $P_{n+1}(x) = x^{7(n+1)} - P_n(x)$ для всех $n \geq 0$. Для каждого $n \geq 0$ найти все вещественные корни $P_n(x)$.

A sequence of polynomials $P_n(x)$ (for all integer $n \geq 0$) is given as $P_0(x) \equiv 1$ and $P_{n+1}(x) = x^{7(n+1)} - P_n(x)$ for all $n \geq 0$. Find all real roots of $P_n(x)$ for an arbitrary integer $n \geq 0$.

2. Последовательность многочленов $P_n(x)$, где $n \geq 0$ – целое число, задана рекуррентно: $P_0(x)$ тождественно равен единице (то есть $P_0(x) \equiv 1$), и $P_{n+1}(x) = x^{11(n+1)} - P_n(x)$ для всех $n \geq 0$. Для каждого $n \geq 0$ найти все вещественные корни $P_n(x)$.

A sequence of polynomials $P_n(x)$ (for all integer $n \geq 0$) is given as $P_0(x) \equiv 1$ and $P_{n+1}(x) = x^{11(n+1)} - P_n(x)$ for all $n \geq 0$. Find all real roots of $P_n(x)$ for an arbitrary integer $n \geq 0$.

3. Последовательность многочленов $P_n(x)$, где $n \geq 0$ – целое число, задана рекуррентно: $P_0(x)$ тождественно равен единице (то есть $P_0(x) \equiv 1$), и $P_{n+1}(x) = x^{17(n+1)} - P_n(x)$ для всех $n \geq 0$. Для каждого $n \geq 0$ найти все вещественные корни $P_n(x)$.

A sequence of polynomials $P_n(x)$ (for all integer $n \geq 0$) is given as $P_0(x) \equiv 1$ and $P_{n+1}(x) = x^{17(n+1)} - P_n(x)$ for all $n \geq 0$. Find all real roots of $P_n(x)$ for an arbitrary integer $n \geq 0$.

4. Последовательность многочленов $P_n(x)$, где $n \geq 0$ – целое число, задана рекуррентно: $P_0(x)$ тождественно равен единице (то есть $P_0(x) \equiv 1$), и $P_{n+1}(x) = x^{5(n+1)} - P_n(x)$ для всех $n \geq 0$. Для каждого $n \geq 0$ найти все вещественные корни $P_n(x)$.

A sequence of polynomials $P_n(x)$ (for all integer $n \geq 0$) is given as $P_0(x) \equiv 1$ and $P_{n+1}(x) = x^{5(n+1)} - P_n(x)$ for all $n \geq 0$. Find all real roots of $P_n(x)$ for an arbitrary integer $n \geq 0$.