8-9th degree

Task 1.

1. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

   Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 99 пиратов, то доля капитана в таком случае составит 51 монета; а если же он выберет 77 пиратов, то его доля будет уже 29 монет. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 1000?

   Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

   Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 99 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 51 coins; and if he chooses 77 pirates, the captain's share will be 29 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 1000?

2. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

   Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 81 пирата, то доля капитана в таком случае составит 64 монет; а если же он выберет 99 пиратов, то его доля будет уже 19 монет. Известно, что число монет меньше 800. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 800?

   Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

   Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 81 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 64 coins; and if he chooses 99 pirates, the captain's share will be 19 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 800?

3. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды

(это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 143 пирата, то доля капитана в таком случае составит 61 монета; а если же он выберет 88 пиратов, то его доля будет уже 39 монет. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 1400?

Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 143 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 61 coins; and if he chooses 88 pirates, the captain's share will be 39 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 1400?

4. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

   Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 91 пират, то доля капитана в таком случае составит 87 монет; а если же он выберет 77 пиратов, то его доля будет уже 17 монет. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 950?

   Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

   Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 91 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 87 coins; and if he chooses 77 pirates, the captain's share will be 17 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 950?

Task 2.

1. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ ($AD > BC$) отмечена такая точка P, что $PC = 2 \cdot DP$. Через эту точку проведена прямая, параллельная AB, которая пересекает AD в точке R. Найдите площадь треугольника ABR, если площадь $ABCD$ равна 40, а $BC = RD$.

   On the side CD of trapezoid $ABCD$ (with its base AD being larger than base BC) there is a point P such that $PC = 2 \cdot DP$. Through this point drawn a line parallel to AB that intersects the base AD at point R. Find the area of triangle ABR while the area of the trapezoid $ABCD$ is equal to 40 and $BC = RD$.

2. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ ($AD > BC$) отмечена такая точка P, что $PC = 2 \cdot DP$. Через эту точку проведена прямая, параллельная AB, которая пересекает AD в точке R. Найдите площадь треугольника ABR, если площадь $ABCD$ равна 80, а $BC = RD$.

   On the side CD of trapezoid $ABCD$ (with its base AD being larger than base BC) there is a point P such that $PC = 2 \cdot DP$. Through this point drawn a line parallel to AB that intersects the base AD at point R. Find the area of triangle ABR while the area of the trapezoid $ABCD$ is equal to 80 and $BC = RD$.

3. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ ($AD > BC$) отмечена такая точка P, что $PC = 2 \cdot DP$. Через эту точку проведена прямая, параллельная AB, которая пересекает AD в точке R. Найдите площадь треугольника ABR, если площадь $ABCD$ равна 100, а $BC = RD$.

   On the side CD of trapezoid $ABCD$ (with its base AD being larger than base BC) there is a point P such that $PC = 2 \cdot DP$. Through this point drawn a line parallel to AB that intersects the base AD at point R. Find the area of triangle ABR while the area of the trapezoid $ABCD$ is equal to 100 and $BC = RD$.

4. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ ($AD > BC$) отмечена такая точка P, что $PC = 2 \cdot DP$. Через эту точку проведена прямая, параллельная AB, которая пересекает AD в точке R. Найдите площадь треугольника ABR, если площадь $ABCD$ равна 60, а $BC = RD$.

   On the side CD of trapezoid $ABCD$ (with its base AD being larger than base BC) there is a point P such that $PC = 2 \cdot DP$. Through this point drawn a line parallel to AB that intersects the base AD at point R. Find the area of triangle ABR while the area of the trapezoid $ABCD$ is equal to 60 and $BC = RD$.

Task 3.

1. Дана доска 6×6, раскрашенная в шахматном порядке. Сколькими способами можно поставить на белые клетки 9 шашек так, чтобы никакие две шашки не стояли бы на одной клетке и чтобы никакие две шашки не располагались бы в клетках, соседних по углу?

   Given a board with size 6×6 colored in a checkerboard pattern. How many ways to put 9 checkers on white cells of the board could there be, such that no two checkers would occupy the same cell and would not be located in cells adjacent by the corners?

2. Дана доска 8×8, раскрашенная в шахматном порядке. Сколькими способами можно поставить на белые клетки 16 шашек так, чтобы никакие две шашки не стояли бы на одной клетке и чтобы никакие две шашки не располагались бы в клетках, соседних по углу?

   Given a board with size 8×8 colored in a checkerboard pattern. How many ways to put 16 checkers on white cells of the board could there be, such that no two checkers would occupy the same cell and would not be located in cells adjacent by the corners?

3. Дана доска 4×6, раскрашенная в шахматном порядке. Сколькими способами можно поставить на белые клетки 6 шашек так, чтобы никакие две шашки не стояли бы на одной клетке и чтобы никакие две шашки не располагались бы в клетках, соседних по углу?

   Given a board with size 4×6 colored in a checkerboard pattern. How many ways to put 6 checkers on white cells of the board could there be, such that no two checkers would occupy the same cell and would not be located in cells adjacent by the corners?

4. Дана доска 6×8, раскрашенная в шахматном порядке. Сколькими способами можно поставить на белые клетки 12 шашек так, чтобы никакие две шашки не стояли бы на одной клетке и чтобы никакие две шашки не располагались бы в клетках, соседних по углу?

   Given a board with size 6×8 colored in a checkerboard pattern. How many ways to put 12 checkers on white cells of the board could there be, such that no two checkers would occupy the same cell and would not be located in cells adjacent by the corners?

Task 4.

1. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном x разность $x^{25} - x$ кратна n.

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer x the number $x^{25} - x$ is divisible by n.

2. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном x разность $x^{21} - x$ кратна n.

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer x the number $x^{21} - x$ is divisible by n.

3. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном x разность $x^{37} - x$ кратна n..

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer x the number $x^{37} - x$ is divisible by n.

4. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном x разность $x^{17} - x$ кратна n.

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer x the number $x^{17} - x$ is divisible by n.

Task 5.

1. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 2022, образуя одно огромное число: 1234567891011...20212022. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

   On a tape all positive integers from 1 to 2022 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...20212022. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3 then Ivan wins, otherwise Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

2. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 1999, образуя одно огромное число: 1234567891011...19981999. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

   On a tape all positive integers from 1 to 1999 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...19981999. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3 then Ivan wins, otherwise Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

3. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 2077, образуя одно огромное число: 1234567891011...20762077. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

On a tape all positive integers from 1 to 2077 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...20762077. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3 then Ivan wins, otherwise Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

4. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 2007, образуя одно огромное число: 1234567891011...20062007. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

   On a tape all positive integers from 1 to 2007 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...20062007. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3 then Ivan wins, otherwise Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

Task 6.

1. Решить систему неравенств:
$$\begin{cases} 4x^2 + 4xy + 19y^2 \leq 2 \\ x - y \leq -1 \end{cases}$$

   Solve the following system of inequalities:
$$\begin{cases} 4x^2 + 4xy + 19y^2 \leq 2 \\ x - y \leq -1 \end{cases}$$

2. Решить систему неравенств:
$$\begin{cases} 11x^2 - 10xy + 3y^2 \leq 3 \\ 5x + y \leq -10 \end{cases}$$

   Solve the following system of inequalities:
$$\begin{cases} 11x^2 - 10xy + 3y^2 \leq 3 \\ 5x + y \leq -10 \end{cases}$$

3. Решить систему неравенств:
$$\begin{cases} 11x^2 + 8xy + 8y^2 \leq 3 \\ x - 4y \leq -3 \end{cases}$$

   Solve the following system of inequalities:
$$\begin{cases} 11x^2 + 8xy + 8y^2 \leq 3 \\ x - 4y \leq -3 \end{cases}$$

4. Решить систему неравенств:
$$\begin{cases} 13x^2 - 4xy + 4y^2 \leq 2 \\ 2x - 4y \leq -3 \end{cases}$$

   Solve the following system of inequalities:
$$\begin{cases} 13x^2 - 4xy + 4y^2 \leq 2 \\ 2x - 4y \leq -3 \end{cases}$$