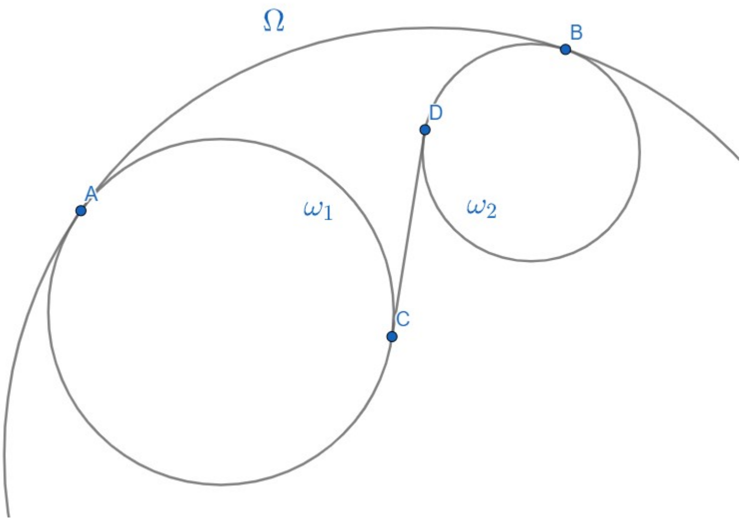
8-9th degree

Task 1. Окружности ω_1 и ω_2, не имеющие общих точек, касаются окружности Ω внутренним образом в точках A и B, соответственно. Центры окружностей ω_1 и ω_2 расположены по разные стороны от прямой CD – общей касательной этих окружностей, причем точка C лежит на ω_1, а точка D – на ω_2. Найдите градусную меру дуги AB окружности Ω, если угол между прямыми AC и BD составляет $55°$.



The circles ω_1 and ω_2 (which have no common points) touch the circle Ω internally at the points A and B, respectively. The centers of the circles ω_1 and ω_2 are located on opposite sides of the line CD which is the common tangent line of these circles while the point C lies on ω_1 and the point D lies on ω_2. Find the degree measure of the arc AB of the circle Ω if the angle between the lines AC and BD is $55°$.

Task 2. Алиса и Боб играют в игру. На плоскости отмечены $n > 1$ точек общего положения (т.е. никакие три из них не лежат на одной прямой), где n – нечетное натуральное число. Алиса и Боб по очереди (начиная с Алисы) выбирают пару точек и соединяют их отрезком (запрещается повторно соединять точки, которые уже соединены отрезком). Проигрывает тот, после чьего хода образуется цикл нечетной длины.

Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?

Alice and Bob are playing a game. For an odd integer $n > 1$ there are n points chosen on a plane in such way that there can't be chosen three of them lying at the same line. Alice and Bob make their moves (starting with Alice) by choosing a pair of the points and connecting them with a segment (it is forbidden to reconnect points that are already connected). The one whose move forms a cycle of odd number of segments – loses the game.

Who will win if both opponents play correctly?

Task 3. Для всех вещественных $x, y, z \geq 1$ докажите неравенство

$$\frac{x+y+z}{3} + xyz \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2$$

Prove for real $x, y, z \geq 1$:

$$\frac{x+y+z}{3} + xyz \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2$$

Task 4. Весьма нестандартный людоед вечером перед сном поймал дружных математиков. «Сегодня я сыт, но завтра я разделаюсь с вами», – сказал он и потом продолжил: «Сегодняшнюю ночь вы проведете в общей камере, а завтра утром я рассажу вас по отдельным камерам с номерами, потом каждого из вас по отдельности (с глазу на глаз) спрошу, какой номер его камеры, и тех, кто угадает в этой первой попытке, выпущу из их камер у всех на глазах. Но после этого я каждому, кто сразу не угадал номер его камеры, дам еще одну попытку – еще раз (с глазу на глаз) спрошу про номер его камеры, однако, если хоть один из них ошибется – я съем всех!».

Как спастись всем математикам?

Известно, что математиков $n > 1$, индивидуальных камер тоже n, они пронумерованы какими-то целыми числами из диапазона от 0 до $(n-1)$ (однако, в беспорядке и, возможно, с повторами и пропусками каких-то номеров – людоед-то малограмотный), из каждой камеры видны номера всех камер, кроме номера самой этой камеры, в общей камере математики могут договариваться о каком угодно алгоритме угадывания номеров своих камер, но в индивидуальных камерах они не могут общаться (передавать какие-либо сигналы друг другу), а разговор с глазу на глаз слышат только его непосредственные участники (людоед и математик, участвующие в разговоре). Сам людоед честный: он действительно отпускает у всех на глазах математиков, которые угадали номера своих камер в первой попытке.

A very unusual cannibal caught some mathematicians at the evening. «Today I am full, but tomorrow I will eat you», he said and then continued: «Tonight you will spend in a common cell, and tomorrow morning I will put you in enumerated separate cells, then I will ask each of you (in private) about what his cell number is, and those who guess correctly in this first attempt will be released from their cells in front of everyone. After that, I will give everyone else one more attempt – once again each of them will be asked (in private) about the number of his cell. If at least one of them will not guess the number, then I will eat them all!».

How can all mathematicians save themselves?

It is known that there are $n > 1$ mathematicians and n individual chambers that are numbered with some integers from the range from 0 to $(n-1)$ (however, in disorder and, possibly, with repetitions and gaps because the cannibal is poor in counting), from each cell you can see the numbers of all the other cells (but cannot see the number of your cell itself), and in the common chamber mathematicians can discuss their strategy, but in separate cells they cannot communicate in any way. The cannibal himself is honest: he really lets go those mathematicians who guessed the numbers of their cells in the first attempt, and all others will see it.

,

,

,

Task 5. *(задача предоставлена партнером Олимпиады – компанией «Тинькофф Образование»)* ·
На столе лежат 16 карточек: на одной из них написано число 1, на второй – 2, на третьей – 3, ..., на последней – 16. Вася перевернул их все и быстро перемешал так, что Петя не успел запомнить местоположение ни одной карточки, а сам Вася запомнил всё.

Петя хочет выложить все 16 карточек в ряд, не переворачивая их, так, чтобы числа на них шли слева направо либо по возрастанию, либо по убыванию. Вася хочет ему в этом помочь. За одну подсказку Вася может указать на две карточки и сказать Пете, чему равен модуль разности чисел на них (не сообщая, какое из чисел больше).

За какое наименьшее количество подсказок Вася может помочь Пете гарантированно добиться цели?
,

There are 16 sheets on a table with the number 1 written on the first one, number 2 on the second one, number 3 on the third one, ..., and number 16 on the last one. Vasil turned them all over and quickly mixed them so that Peter did not have time to remember the location of any sheet, while Vasil remembered all of them.

Peter wants to put all 16 sheets in a row (without turning them over) in such way that the numbers on them go from left to right either in increasing or in decreasing way. Vasil wants to help Peter in this. For one hint, Vasil can point at two sheets and tell Peter the difference between numbers on them without telling which of the numbers is larger.

For what smallest number of tips can Vasil help Peter to achieve the goal for sure?