Task 1. Сколькими способами из множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2024\}$ можно выбрать n чисел так, чтобы сумма любых m (произвольное натуральное число, меньшее n) из выбранных чисел не делилась на 3? Рассмотрите все возможные $n \geq 2$.

Answer: $2 \cdot C_{675}^{2} + 2 \cdot C_{675}^{3} + 675^2 = 2 \cdot C_{676}^{3} + 675^2 = 102971025$

Решение (RUS). Сначала докажем, что из любых трех целых чисел можно выбрать такие, сумма которых кратна 3 – для этого достаточно рассмотреть только их остатки при делении на 3. Если среди этих чисел есть кратное 3, то его одного достаточно; если все числа некратны 3, то либо они дают равные остатки при делении на 3 ($1, 1, 1$ или $2, 2, 2$ – в таком случае берем все 3 числа), либо два дают равные остатки, а третье – другой остаток ($2, 2, 1$ или $1, 1, 2$ – в таком случае берем два числа с различными остатками). Утверждение доказано.

Из доказанного следует, что $n \leq 3$, а из условия следует, что $n \geq 2$. Также отметим, что среди элементов множества $\{1, 2, \ldots, 2024\}$ есть по 675 дающих остатки 1 и 2 при делении на 3 (далее вместо натуральных чисел будем писать их остатки при делении на 3). Значит, множество выбранных чисел равно либо $\{1, 1, 1\}$, либо $\{2, 2, 2\}$, либо $\{1, 1\}$, либо $\{2, 2\}$, либо $\{1, 2\}$. Итак, искомое количество способов равно $2 \cdot C_{675}^{2} + 2 \cdot C_{675}^{3} + 675^2 = 2 \cdot C_{676}^{3} + 675^2 = 102971025$.

Критерии оценивания:

- дан верный обоснованный ответ – 5 баллов;
- не рассмотрены 1-2 случая для остатков от деления выбранных чисел на 3 – 3 балла;
- рассмотрены остатки от деления на 3, доказано, что $n \leq 3$ – 1 балл.

Task 2. Преследуя преступника, полицейский упустил его в одном из дворов. В этот двор был единственный вход, а также 3 подъезда, в любом из которых мог скрыться преступник. Известно, что

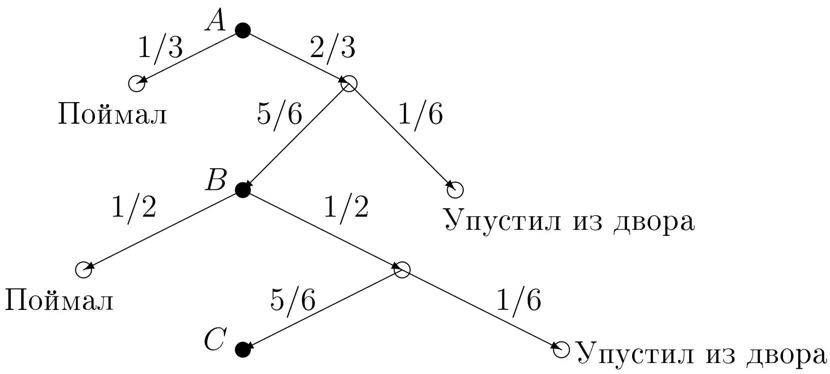
- если полицейский войдет в подъезд, в котором укрылся преступник, то гарантированно поймает его;
- если полицейский войдет в подъезд, где преступника нет, то с вероятностью $\frac{1}{6}$ тот убежит через выход из двора (и поймать его уже не удастся), с вероятностью $\frac{1}{2}$ преступник никуда не переместится, и с вероятностью $\frac{1}{3}$ спрячется в другом подъезде, где полицейского сейчас нет;
- не найдя преступника в подъезде, полицейский каждый раз выбирает другой подъезд для осмотра совершенно случайным образом.

С какой вероятностью полицейский поймает преступника? Перемещения между подъездами можно считать мгновенными.

Answer: $\frac{17}{21} \approx 0.8$

Решение (RUS). С вероятностью $1/3$ полицейский поймает преступника в первом же подъезде, в который зайдет, и с вероятностью $2/3$ преступника там не окажется – значит, с вероятностью $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$ преступник сбежит из двора (сразу после первого захода полицейского в подъезд), и с вероятностью $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{9}$ преступник так или иначе окажется в одном из подъездов, где сейчас нет полицейского.

Построим дерево, отображающее все возможные события (на рёбрах написаны соответствующие условные вероятности):



Оказавшись в точке B, полицейский будет иметь выбор из 2 подъездов, и с равной вероятностью поймает преступника в любом из них – этим обусловлены вероятности $\frac{1}{2}$ поймать преступника и дать ему скрыться в другом подъезде. После этого преступник снова либо сбежит из двора с вероятностью $1/6$, либо так или иначе окажется (или останется) в подъезде, в котором сейчас нет полицейского.

Заметим, что вероятность поймать преступника в точке B равна таковой в точке C – обозначим эту вероятность за P. Тогда, учитывая все возможные события в точке B, получим $P = \frac{1}{2} + \frac{5}{12} \cdot P$, откуда $P = \frac{6}{7}$. Осталось учесть события из точки A, тогда получим изначальную вероятность поймать преступника $\frac{1}{3} + \frac{5}{9} \cdot P = \frac{17}{21} \approx 0.8$

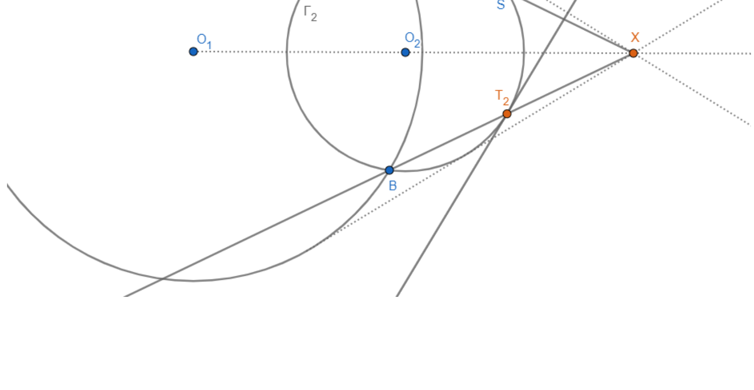
Критерии оценивания:

- приведен верный обоснованный ответ – 5 баллов;
- рассматривается случай, когда погоня продлится сколь угодно долго (рассмотрена сумма беск. убывающей геометрической прогрессии) – 2 балла.

Task 3. Даны две окружности Γ_1 и Γ_2, пересекающиеся в (несовпадающих) точках A, B. К этим окружностям проведены общие внешние касательные, пересекающиеся в точке X. Прямая XA повторно пересекает Γ_1 в точке T_1, а прямая XB повторно пересекает Γ_2 в точке T_2. Касательная к Γ_1 в точке T_1 и касательная к Γ_2 в точке T_2 пересекаются в точке Y.

Докажите, что точки X, Y, T_1, T_2 лежат на одной окружности.

Решение (RUS). Пусть O_1, O_2 – центры Γ_1, Γ_2 соответственно; S – вторая точка пересечения XA с Γ_2. Не ограничивая общности, будем считать, что радиус Γ_2 меньше радиуса Γ_1 (очевидно, эти радиусы не равны, иначе общие внешние касательные были бы параллельны). Значит, S лежит на отрезке XT_1.



Докажем, что прямая XA составляет равные углы с касательной к Γ_1 в точке T_1 и с касательной к Γ_2 в точке S. Гомотетия с центром X и коэффициентом XA/XS переводит Γ_2 в Γ_1, при этом точки пересечения прямой XA с окружностью Γ_2 переходят в точки пересечения XA с Γ_1 в порядке их следования на луче XA. Значит, точка S перейдет в точку A, а точка A – в точку T_1.

По свойству гомотетии, касательная к Γ_2 переходит в касательную к ее образу Γ_1, т.е. касательная к Γ_2 в точке S перейдет в касательную к Γ_1 в точке A. При этом, согласно теореме об угле между касательной и хордой, касательные к Γ_1 в точках A и T_1 составляют равные углы с хордой AT_1, из чего следует, что прямая XA составляет равные углы с касательной к Γ_1 в точке T_1 и с касательной к Γ_2 в точке S. Утверждение доказано.

Отметим, что если две касательные из доказанного утверждения параллельны, то прямая T_1S содержит центры окружностей Γ_1 и Γ_2, из чего следует, что точки A, B совпадают, а это противоречило бы условию.

Докажем, что $\angle YT_1X = \angle YT_2X$, тогда задача будет решена. Рассмотрим прямую O_1O_2 – ось симметрии окружностей Γ_1 и Γ_2. Очевидно, прямые XT_1 и XT_2 симметричны относительно O_1O_2; то же самое можно сказать и о касательных к Γ_2 в точках S и T_2 – значит, $\angle YT_2X$ равен углу между XT_1 и касательной к Γ_2 в точке S. Из доказанного выше утверждения следует, что этот же угол равен YT_1X, т.е. имеем $\angle YT_1X = \angle YT_2X$, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания:

- приведено верное доказательство – 5 баллов;
- доказано, что $T_1O_1 \parallel AO_2$ (либо эквивалентный факт) – 2 балла.

Task 4. Про положительные числа a, b, c известно, что $a+b+c=1$, и каждое из них не превосходит $\frac{1}{2}$. Докажите, что

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}+2(b\sqrt{a}+c\sqrt{b}+a\sqrt{c})$$

Решение (RUS). Преобразуем неравенство к виду

$$\sqrt{a}(1-2b)+\sqrt{b}(1-2c)+\sqrt{c}(1-2a) \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Заметим, что числа $(1-2b)$, $(1-2c)$, $(1-2a)$ по условию положительны и в сумме дают единицу. Применим неравенство Йенсена для функции $\sqrt{x}$, переменных a, b, c и коэффициентов $(1-2b)$, $(1-2c)$, $(1-2a)$. В силу того, что функция $\sqrt{x}$ вогнута на луче $(0, +\infty)$, получаем неравенство

$$\sqrt{a}(1-2b)+\sqrt{b}(1-2c)+\sqrt{c}(1-2a) \leqslant \sqrt{a(1-2b)+b(1-2c)+c(1-2a)}$$

Осталось заметить, что $a(1-2b)+b(1-2c)+c(1-2a) = a(a+c-b)+b(a+b-c)+c(b+c-a) = a^2+ac-ab+b^2+ab-bc+c^2+bc-ac = a^2+b^2+c^2$.

Критерии оценивания:

- приведено верное обоснованное доказательство – 5 баллов;
- неравенство преобразовано к виду

$$\sqrt{a}(1-2b)+\sqrt{b}(1-2c)+\sqrt{c}(1-2a) \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

  или похожему, к которому можно применить неравенство Йенсена: 1 балл;
- за отсутствие доказательства вогнутости функции $\sqrt{x}$ баллы не снижаются.

Task 5. Петя и Вася разыгрывают призовой фонд, содержащий перед началом игры натуральное число M фунтиков. (Мы не знаем, что такое фунтики, но фунтики бесконечно делимы, например можно «отмерить» $1/\sqrt{2}$ фунтиков). Петя знает секретное (целое) число фунтиков N (из диапазона $0 \le N \le M$), которое ему нужно для поездки в Иннополис, а Вася должен угадать это число N.

Игра состоит из раундов «Васина догадка – Петин ответ», которые продолжаются, пока Вася не назовет число N или пока не опустеет призовой фонд. В каждом раунде Вася называет целое число k (из диапазона $0 \le k \le M$) и

- если $k < N$, то Петя говорит об этом Васе, после чего игроки просто переходят к следующему раунду;
- если $k > N$, то Петя говорит об этом Васе, забирает из фонда $M/3$ фунтиков, и если в фонде еще остались фунтики, то игроки переходят к следующему раунду;
- если $k = N$, то Петя говорит об этом Васе, затем Вася получает из фонда $(x - n)$ фунтиков, где x – количество фунтиков в фонде на данный момент, а n – количество сыгранных раундов. Если $x \le n$, то Вася получит 0 фунтиков.

Какое наибольшее число фунтиков может гарантировать себе Вася?

Answer: $\frac{2M}{3} - \min\{y \mid \frac{y(y+1)}{2} \ge M\}$

Решение (RUS). Очевидно, что Васе нужна стратегия, в которой он не более двух раз «проваливается», то есть называет число, большее задуманного Петей N (так как после третьего «провала» весь фонд уходит Пете). Сначала предложим стратегию, позволяющую Васе гарантированно получить указанное количество фунтиков, а потом докажем, что это максимальное гарантированное количество.

Стратегия Васи с одним «провалом»: пусть $n = \min\{y \mid \frac{y(y+1)}{2} \ge M\}$ (т.е. наименьшее натуральное n, при котором $\frac{n(n+1)}{2} \ge M$). Шаги до «провала»: Вася называет числа $k_1 = n$, $k_2 = n + (n-1)$, $k_3 = n + (n-1) + (n-2)$, ..., пока Петя не скажет, что для очередного $k_{m+1} = n + (n-1) + \cdots + (n-m) > N$ (первый «провал») или что угадано число N. Сумма арифметической прогрессии $\frac{n(n+1)}{2} \ge M \ge N$, а значит, такой момент обязательно наступит. Если это момент первого «провала», то в этот момент Петя получает из фонда $M/3$ фунтиков, в фонде остается $2M/3$ фунтиков, а Вася приступает к выполнению шагов до «угадал».

Шаги до «угадал»: Вася называет (не более чем $(m-1)$) последовательные числа от $(k_m + 1)$ до N (которое меньше $k_m + 1$) до тех пор, пока Петя не скажет, что задуманное число угадано, а Вася, сыграв $n = (m+1) + (n - (m-1))$ раундов, получает из фонда $(2M/3 - n)$ фунтиков.

Докажем, что такая стратегия оптимальна. Пусть есть какая-либо стратегия для Васи, позволяющая гарантированно получить больше фунтиков. Эта стратегия предписывает назвать возрастающую последовательность чисел $k'_1 < k'_2 < \cdots < k'_t$, где $t < n$ и $k'_{i+1} < k'_i + (n-i)$ для любого $1 \le i < t$. Но так как $n = \min\{y \mid \frac{y(y+1)}{2} \ge M\}$, то $k'_t < M$, а значит, остались непроверенные числа от $(k'_t + 1)$ до M, и такая стратегия не может гарантированно дать лучший результат.

Критерии оценивания:

- приведен верный обоснованный ответ – 5 баллов;
- приведена и доказана формула для шагов до «угадал» – 4 балла;
- рассмотрена арифметическая прогрессия – 2 балла.

Task 6. В правильном n-угольнике ($n \ge 3$) Коля, аналитик платформы «AllCups», решил сопоставить отрезкам между вершинами (т.е. сторонам и диагоналям) их *важности*, т.е. натуральные числа, удовлетворяющие условиям:

2. для любого треугольника с вершинами в вершинах данного n-угольника важности двух его сторон равны и превосходят важность третьей стороны;

3. важности всех отрезков должны образовывать отрезок натурального ряда, т.е. быть числами $1, 2, 3, \ldots, k$ без пропусков, но с повторениями.

Найдите максимальное возможное k.

Answer: $n - 1$

Решение (RUS). Докажем индукцией по n, что наибольшее возможное значение k не превосходит $n-1$. База ($n = 3$): присвоим сторонам треугольника важности $2, 2, 1$ – они удовлетворяют условию.

Пусть утверждение выполняется для всех n от 3 до $p \in \mathbb{N}$. Докажем для $n = p+1$. Рассмотрим произвольное распределение важностей для n-угольника, где $n = p + 1$ (далее покажем, что оно существует). Согласно условию, должен быть отрезок важности 1 – рассмотрим произвольный треугольник на вершинах n-угольника (далее будем называть такие треугольники *подходящими*), для которого этот отрезок является стороной. В таком треугольнике не может быть другой стороны важности 1, иначе важность третьей стороны была бы меньше 1, что невозможно. Значит, у любого подходящего треугольника со стороной важности 1 остальные две стороны имеют равную важность, бóльшую 1.

Обозначим вершины отрезка важности 1 как A и B, а C и D будут произвольными вершинамми n-угольника, отличными от A и B (такие найдутся, т.к. $p+1 \geq 4$). Покажем, что важности сторон треугольника ACD не поменяются после замены A на B. Действительно, при такой замене отрезок AC будет заменен на BC, а отрезок AD – на BD. Но поскольку оба треугольника ABC и ABD содержат отрезок AB важности 1, то, согласно доказанному выше, важности двух других сторон каждого треугольника равны. Значит, важности AC и BCсовпадают, как и важности AD и BD.

Проделаем следующую процедуру: для отрезка AB важности 1 эти две вершины «склеим» в одну вершину X, и для каждой другой вершины C важностью XC будем считать важность AC. Докажем, что новый многоугольник удовлетворяет первому условию и «ослабленному» второму, т.е. важности всех его сторон и диагоналей образуют отрезок $1, 2, 3, \ldots, k$ или $2, 3, \ldots, k$ натурального ряда без пропусков. Действительно, для любого подходящего треугольника XYZ нового многоугольника, если ни одна из вершин X, Y, Z не была склеена с другой, то требование на важности сторон не изменилось. Если же какая-то вершина (не ограничивая общности, вершина X) была склеена из вершин A и B, то, как было показано ранее, распределение важностей в $\triangle XYZ$ будет таким же, как в треугольниках AYZ и BYZ, в каждом из которых первое условие было выполнено, а значит, оно не нарушилось и после склейки.
Второе «ослабленное» условие также будет выполнено, т.к. после склейки из набора важностей будет удалено 1, а остальные останутся.

Проделав такую склейку по очереди с каждым отрезком важности 1 получим m-угольник ($m < n$), для которого выполнены первое и «ослабленное» второе условия задачи. Для него понизим все важности на 1, и получим выполняющиеся условия для m-угольника – значит, $k-1 \leq m-1$, откуда $k \leq m \leq n-1$, что и требовалось доказать.

Осталось показать, что требуемое распределение важностей возможно. Занумеруем все вершины n-угольника числами от 1 до n, и зададим отрезкам, соединяющим вершины с номерами i и j ($i < j$), важность $j - 1$. Легко проверить, что оба условия на важности выполняются, и максимальная важность равна $n - 1$.

Критерии оценивания:

- приведен верный обоснованный ответ – 5 баллов;
- применена индукция до доказательства того, что $k = n - 1$ – 1 балл.