7^{th} degree

Task 1. Дед Мороз подарил каждому ученику 7«В» класса по одному подарку. Посмотрев на подарки друг друга, некоторые ученики поняли, что хотели бы получить подарок, доставшийся другому. Заметив, что каждый подарок понравился ровно одному ученику, учитель установил следующие правила:

- один раз в минуту любой ученик A может передать подарок любому ученику B (кроме себя самого), и никакой другой ученик C в эту же минуту не может передавать подарок ученику B;
- ученик может не передавать подарок, если ему никто не передает свой;
- по завершении каждой минуты у любого ученика на руках должен быть ровно один подарок.

За какое наименьшее число минут можно добиться того, чтобы у каждого ученика был желаемый подарок?

Answer: 1

Решение (RUS). Пронумеруем учеников и расположим их по кругу (номера возрастают по часовой стрелке) так, чтобы 1-й хотел подарок 2-го, 2-й хотел подарок 3-го и т.д., n-й хотел подарок 1-го (при этом может получиться так, что образуется несколько кругов, а те ученики, у кого на руках уже есть желаемый подарок, не встанут ни в один из этих кругов). Затем в каждом круге в первую же минуту каждый ученик передает подарок следующему по часовой стрелке – так у всех на руках будут желаемые подарки.

Критерии оценивания:

- дан верный обоснованный ответ – 5 баллов;
- незначительные ошибки в аргументации – 4 балла;
- ответ неверен – 0 баллов.

Task 2. Найти наименьшее натуральное число M, такое, что

- в десятичной записи M заканчивается на 7;
- если зачеркнуть эту последнюю цифру 7 и записать её в начале числа, получившееся число будет в 5 раз больше исходного.

Answer: 142857

Решение (RUS). Исходное число $M = \overline{ab\ldots 7}$, тогда $M - 7 = \overline{ab\ldots 0}$ нацело делится на 10. Пусть n – число цифр в десятичной записи M. По условию $[M : 10] + 7 \cdot 10^{n-1} = 5 \cdot M$ (здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x). Следовательно, $M - 7 + 7 \cdot 10^n = 50 \cdot M$, откуда $7 \cdot (10^n - 1) = 49 \cdot M$ и, наконец, $10^n - 1 = 7 \cdot M$. Значит, число $10^n - 1$ нацело делится на 7. Перебором находим, что минимальное такое $n = 6$:

$$M = \frac{10^6 - 1}{7} = 142857$$

Критерии оценивания:

- дан верный обоснованный ответ – 5 баллов;
- доказано, что искомое число содержит не менее 6 десятичных цифр – 3 балла;

Task 3. Андрею надо распилить клетчатую доску $2n \times 2n$, делая разрезы только вдоль границ клеток. Если он будет пилить доску на квадраты 2×2, то на это ему потребуется 15 минут, а если пилить доску на квадраты 1×1, то потребуется 25 минут. Сколько времени потребуется Андрею, чтобы распилить доску на прямоугольники 1×2? Время, затрачиваемое Андреем, пропорционально длине распилов, и n – натуральное число.

Answer: 20 минут

Решение (RUS). Как бы Андрей ни пилил доску, совокупная длина распилов (а значит, и пропорциональное ей время) зависит только от того, какие куски в итоге получились. Поэтому будем считать, что каждый распил имел длину $2n$ (и Андрей тратил на него t минут), тем более что таким образом можно получить и квадраты 2×2 ($(n-1)$ горизонтальных распилов и столько же вертикальных – на них требуется $(2n-2)t$ минут), и квадраты 1×1 ($2n-1$ горизонтальных распилов и столько же вертикальных – на них треубется $(4n-2)t$ минут), и прямоугольники 1×2 ($2n-1$ горизонтальных распилов и $(n-1)$ вертикальных – на них треубется $(3n-2)t$ минут).

Остается заметить, что $(3n-2)t = \frac{1}{2}\big((2n-2)t + (4n-2)t\big)$, т.е. искомое время равно $\frac{1}{2}\big(15+25\big) =$ 20 минут.

Критерии оценивания:

- дан верный обоснованный ответ – 5 баллов;
- ответ неверен при наличии верной идеи, либо ответ верен, но присутствуют существенные ошибки в аргументации – 1 балл;
- ответ и аргументация ошибочны – 0 баллов.

Task 4. На столе в конферец-зале лежат 27 закрытых ноутбуков. В каждый свой перерыв Олеся заходит в конферец-зал и меняет положение у пяти ноутбуков: закрытые ноутбуки открывает, а открытые – закрывает. Какое наименьшее количество перерывов потребуется Олесе, чтобы все 27 ноутбуков стали открытыми?

Answer: 7

Решение (RUS). Всего ноутбуков 27, за один перерыв Олеся меняет положение у 5 ноутбуков, тогда точно понадобится не менее 6 перерывов. Докажем, что ровно за 6 перерывов Олеся не смогла бы открыть все ноутбуки. Чтобы закрытый ноутбук в конце оказался открытым, его положение нужно поменять нечётное количество раз. Так как ноутбуков 27, и у каждого из них положение поменяли нечётное количество раз, то суммарно положения ноутбуков менялись нечётное количество раз. Если Олеся справилась бы за 6 перерывов, то она бы суммарно поменяла положение ноутбуков ровно 30 раз, но это число чётное. Получаем, что потребуется хотя бы 7 перерывов.

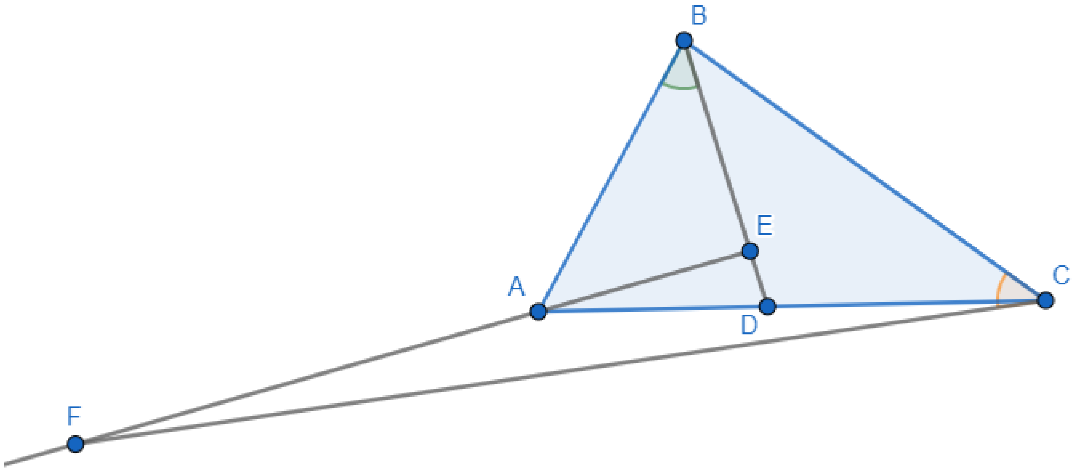
Приведём пример того, как Олеся могла открыть все ноутбуки ровно за 7 перерывов. Пронумеруем все ноутбуки числами от 1 до 27. За первые 5 перерывов она откроет все ноутбуки с номерами от 3 до 27 (всего 25 штук), за 6-ой перерыв поменяет положение ноутбуков с номерами $1, 3, 4, 5, 6$, тогда закрытыми окажутся ноутбуки $2, 3, 4, 5, 6$, и в последний перерыв Олеся откроет эти 5 ноутбуков.

Критерии оценивания:

- дан верный обоснованный ответ – 5 баллов;
- доказана оценка – 3 балла;
- приведен верный пример без оценки – 2 балла.

Task 5. В треугольнике ABC на стороне AC отмечена точка D так, что DBC – равнобедренный треугольник с основанием BC. На отрезке BD выбрана точка E так, что $\triangle BEA$ – равнобедренный с основанием AB. На луче EA за точкой A выбрана точка F таким образом, что $\triangle CAF$ – равнобедренный с основанием CF. Найдите угол BCF, если $\angle ABD = 48°$.

Answer: $42°$



Решение (RUS). Вспомним теорему о внешнем угле треугольника, а именно:
В произвольном треугольнике XYZ внешний угол при вершине X (т.е. смежный с $\angle YXZ$) равен $\angle XYZ + \angle XZY$.
Доказать ее легко, если заметить, что и внешний угол при вершине X, и сумма остальных двух внутренних углов треугольника дополняют $\angle YXZ$ до $180°$. Этой теоремой мы воспользуемся несколько раз.

В силу равнобедренности $\triangle ABE$ имеем $\angle BAE = \angle ABE = 48°$. По теореме о внешнем угле получим $\angle AED = \angle EAB + \angle ABE = 2\angle ABC = 2 \cdot 40° = 96°$.

Аналогично, в треугольнике DBC имеем $\angle DBC = \angle BCD$, откуда $\angle EDA = 2\angle BCD$; и в треугольнике FAC так же $\angle EAD = 2\angle ACF$.

Таким образом, внутренние углы $\triangle AED$ равны $96°$, $2\angle BCD$, $2\angle ACF$. При этом сумма этих углов равна $180°$, откуда $\angle BCD + \angle ACF = (180° - 96°)/2 = 42°$.

Осталось заметить, что искомый $\angle BCF = \angle BCD + \angle ACF = 42°$.

Критерии оценивания:

- дан верный обоснованный ответ – 5 баллов;
- в целом верное решение содержит незначительные ошибки – 3 балла;
- ответ неверен – 0 баллов.

Task 6. В сообществе ВКонтакте состоят 2024 девочки и 2024 мальчика с попарно различными именами, т.е. в этом сообществе нет двух членов с одинаковыми именами. Расставив их по именам в алфавитном порядке, можно сказать: «среди некоторых N подряд стоящих ребят поровну девочек и мальчиков». При каком наибольшем $N < 4048$ это утверждение будет гарантированно верно?

Answer: 2024

Решение (RUS). Очевидно, требуемое N чётно. Сначала покажем, что $N < 4046$. Действительно, для $N = 4046$ существует контрпример (здесь и далее «B» обозначает мальчика, «G» – девочку, «X» – человека, пол которого неизвестен или неважен):

$$B\ B\ X\ X\ \ldots X\ X\ B\ B$$

– при такой расстановке среди любых 4046 подряд стоящих ребят мальчиков будет на 2 меньше, чем девочек. Нетрудным перебором можно показать, что любая другая расстановка четырех «крайних» (по 2 с каждого края) ребят дает $N = 4046$.
Аналогично получим контрпример для $N = 4044$:

$$B\ B\ B\ X\ X\ \ldots X\ X\ B\ B\ B$$

– среди любых 4044 подряд стоящих ребят мальчиков будет меньше, чем девочек. Здесь тоже нетрудным перебором убеждаемся, что любая другая расстановка шести «крайних» (по 3 с каждого края) ребят дает $N \geq 4044$.
Продолжая рассуждения подобным образом, получим расстановку

$$B\ B\ B\ B\ \ldots B\ B\ G\ G\ \ldots G\ G\ G\ B\ B\ \ldots B\ B\ B\ B$$

– здесь последовательно стоят 1012 мальчиков, затем все 2024 девочки, затем остальные 1012 мальчиков. Для такой расстановки $N = 2024$.

Осталось доказать, что в любой расстановке можно найти $N = 2024$ подряд стоящих ребят, среди которых поровну девочек и мальчиков. Рассмотрим произвольную расстановку и заметим, что если первый и последний человек в ней – разных полов, то можно выбрать остальные $N = 4046 > 2024$ человека.
Если первый и последний в ряду – одного пола (без ограничения общности будем считать, что это мальчики), то посмотрим на 2-го и предпоследнего: если среди них есть девочка, то берем всех, кроме нее и стоящего с ней по соседству мальчика (того, что на краю ряда) – снова получим $N = 4046 > 2024$ подряд стоящих ребят, среди которых по 2023 мальчика и девочки. Значит, по двое с каждого края ряда – мальчики. Продолжая рассуждения таким образом, придём к расстановке

$$\underbrace{B\ B\ B\ \ldots B\ B}_{a}\,G\ X\ X\ \ldots X\ X\ G\ \underbrace{B\ B\ \ldots B\ B\ B}_{b},$$

в которой без ограничения общности $b \leq 1012 \leq a \leq 2024$, и на позициях $(a+1)$, $(4048-b-1)$ стоят девочки. Докажем, что можно выбрать $N \geq 2024$ подряд стоящих ребят, среди которых поровну мальчиков и девочек. Для этого рассмотрим функцию $D(n) = B(n) - G(n)$, где $B(n), G(n)$ – соответственно количество мальчиков и девочек, занимающих позиции от 1 до n включительно.

Для нашей расстановки $D(a) = a$, $D(4048 - b) = -b$. Поскольку с изменением n на 1 значение $D(n)$ также изменяется на 1, и значения $D(n)$ на концах отрезка $[a, 4048 - b]$ имеют разные знаки, то для какого-то натурального $m \in [2a; 4048-2b]$ выполнено $D(m) = 0$. Выберем ребят с номерами от 1 до m – они будут удовлетворять условию, и их количество равно $N = m \geq 2a \geq 2\cdot 1012 = 2024$, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания:

- дан верный обоснованный ответ – 5 баллов;
- доказано, что в любой расстановке $N \leq 2024$ – 3 балла;
- дан пример расстановки с $N = 2024$ – 2 балла.