8-9th degree

Task 1. Найдите количество слагаемых после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении
$$(x^2+8)^{20}\cdot(x^5+9)^{24}$$

Answer: 157

Решение (RUS). Вспомним формулу бинома:
$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b^1 + C_n^2a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1}a^1b^{n-1} + C_n^nb^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$
Для нашего выражения получим
$$\left(C_{20}^0x^{40} + C_{20}^1x^{38}8^1 + \dots + C_{20}^{19}x^2 8^{19} + C_{20}^{20}8^{20}\right)\cdot\left(C_{24}^0x^{120} + C_{24}^1x^{115}9^1 + \dots + C_{24}^{23}x^5 9^{23} + C_{24}^{24}9^{24}\right),$$
остается раскрыть скобки, причем коэффициенты нас интересовать не будут (знаем, что все они положительны), а будут интересовать только степени при x. Ясно, что наименьшая такая степень равна 0, а наибольшая – 160, т.е. количество слагаемых не превосходит 161. Теперь заметим, что некоторые показатели степени x в таком разложении встречаться не будут: например, не встретится показатель 1, поскольку в разложении $(x^2+8)^{20}$ все показатели степеней x кратны 2, в разложении $(x^5+9)^{24}$ все показатели степеней x кратны 5, а 1 невозможно получить суммой $2a+5b$ для целых неотрицательных a, b.

Итак, осталось найти количество целых чисел из отрезка $[0;160]$, представимых в виде $2a+5b$ для целых неотрицательных a, b, причем $a \le 20$, $b \le 24$. Покажем, что этому условию удовлетворяют все числа от 0 до 160, кроме $1, 3, 157, 159$.

Действительно, если целое $n \in [0;160]$ четно, выберем $b = \min\{24; 2[n/10]\}$ (здесь $[t]$ обозначают целую часть t), после чего останется «добрать» до любого четного $n \le 160$ не более 40, т.е. нам хватит $a \le 20$.

Если же целое $n \in [5;155]$ нечетно, то выберем $b = \min\{23; 2[n/10]+1\}$, после чего также $a \le 20$.

Очевидно, $n=1$ и $n=3$ получить не удастся, а поскольку $n=160$ достижимо ($a=20$, $b=24$), то недостижимы $160-1=159$ и $160-3=157$. Значит, нам подходят $161-4=157$ чисел.

Критерии оценивания:

- дан верный обоснованный ответ – 5 баллов;
- недостаточная аргументация при наличии верного хода рассуждений – 3 балла.

Task 2. Найдите все трёхзначные (в десятичной записи) числа, которые при делении на 11 дают число, равное сумме квадратов цифр исходного числа.

Answer: 550 и 803

Решение (RUS). Пусть наше число в десятичной записи имеет вид $\overline{abc}$, где a, b, c – десятичные цифры, и $a \ne 0$. Есть два варианта: $b \ge a$ и $b < a$.

В случае $b \ge a$ имеем $\overline{abc} = 11\cdot\overline{ac}$, откуда $b = a+c < 10$. По условию $10a + c = a^2 + (a+c)^2 + c^2$, откуда $c = 2(a^2+c^2+ac-5a)$, т.е. цифра c – четная.
$c=0$: тогда $0 = a^2-5a$, откуда $a=b=5$ и $\overline{abc} = 550$;
$c=2$: тогда $a^2-3a+3=0$ – нет корней;
$c=4$: тогда $a^2-a+14=0$ – нет корней;
$c=6$: тогда $a^2+a+33=0$ – нет корней;
$c=8$: тогда $a=1$ и $198/11 = 18 \ne 1^2+8^2+9^2$.

В случае $b < a$ имеем $\overline{abc} = 11 \cdot \overline{(a-1)c} = 100a + 10\big((a-1+c) - 10\big) + c$, причем $a - 1 + c \geq 10$, т.е. $a + c \geq 11$.
По условию $a^2 + (a+c-11)^2 + c^2 = 10(a-1) + c$, откуда $c - 131 = 2(a^2 + c^2 + ac - 16a - 11c)$, т.е. цифра c – нечетная.
$c = 1$: тогда $a \geq 10$, что невозможно;
$c = 3$: тогда $a^2 - 13a + 40 = 0$, откуда $a = 5$ или $a = 8$. В первом случае нарушается условие $a + c \geq 11$, а во втором случае получим $\overline{abc} = 803$;
$c = 5, 7, 9$: тогда уравнение $c - 131 = 2(a^2 + c^2 + ac - 16a - 11c)$ не имеет корней.

Критерии оценивания:

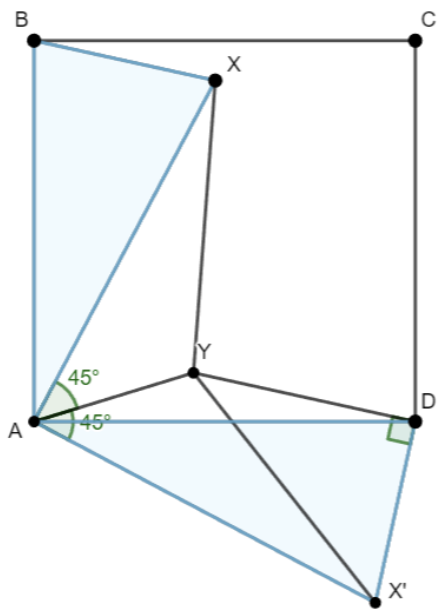
- дан верный обоснованный ответ – 5 баллов;
- ответ неверен при наличии верного хода рассуждений – 3 балла;
- ответ верен при почти полном отсутствии аргументации – 1 балл.

Task 3. Дан квадрат $ABCD$. Внутри треугольников ABC и ADC отметили точки X и Y соответственно. Оказалось, что отрезки BX и DY параллельны, а угол XAY равен $45°$. Докажите, что $XY^2 = BX^2 + DY^2$.

Решение (RUS). Повернём треугольник ABX на $90°$ по часовой стрелке вокруг точки A. Точка B попадёт в точку D, а точка X — в точку X'.

Заметим, что в силу поворота $\angle XAX' = 90°$, следовательно $\angle YAX' = \angle XAX' - \angle XAY = 90° - 45° = 45°$. Получаем, что треугольники XAY и $X'AY$ равны ($AX = AX'$, сторона AD — общая, $\angle XAY = \angle X'AY$), и следовательно $XY = X'Y$.

Отрезки BX и DY параллельны, а отрезок DX' получается из отрезка BX поворотом на $90°$, следовательно DX' и DY будут перпендикулярны. Осталось рассмотреть треугольник YDX'. По доказанному ранее $\angle YDX' = 90°$, тогда по теореме Пифагора $DY^2 + DX'^2 = YX'^2$ и в силу равенств $DX' = BX$, $YX' = YX$ получаем $XY^2 = BX^2 + DY^2$.



Критерии оценивания:

- построена точка X' (или аналогичная Y') из решения, но дальнейших продвижений нет: $+2$ балла;

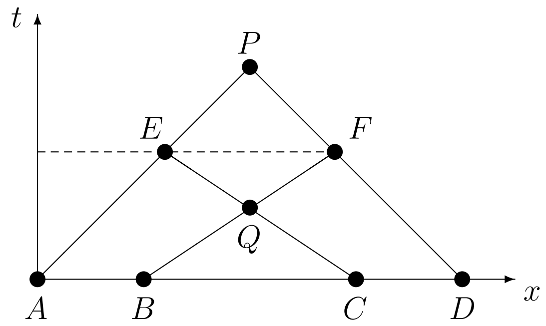
- кроме построения точки X' ещё доказано равенство отрезков XY и $X'Y$ или равносильное утверждение про равенство треугольников XAY и $X'AY$ без дальнейших продвижений: +3 балла.

Task 4. Города A, B, C, D расположены вдоль одной дороги в указанном порядке. Андрей и Денис одновременно начали движение навстречу друг другу с равными скоростями из городов A и D, соответственно. В тот же момент времени Вера и Света одновременно начали движение навстречу друг другу с равными скоростями из городов B и C, соответственно. Все четверо двигаются с постоянными скоростями.

Известно, что Андрей встретился со Светой в тот же момент, когда Вера встретилась с Денисом. Верно ли, что Вера встретила Свету на том же месте, где встретились (или встретятся) Андрей с Денисом? Обоснуйте свой ответ.

Answer: Верно

Решение (RUS). Изобразим движение всех четверых на координатной плоскости, где по оси абсцисс будем откладывать координату (расстояние до города A), по оси ординат – время, прошедшее с начала движения:



Согласно условию, точки E, F имеют равные ординаты; скорость в этой модели – это котангенс угла наклона соответствующей прямой к оси абсцисс. Тогда $\triangle PEF, \triangle QEF$ – равнобедренные с общим основанием EF, поэтому диагонали четырехугольника $PFQE$ пересекаются под углом $90°$, а поскольку одна из его диагоналей EF перпендикулярна оси ординат, то другая его диагональ PQ перпендикулярна оси абсцисс, т.е. абсциссы точек встречи Андрея и Дениса, Веры и Светы совпадают, что и требовалось доказать.

Комментарий: если Вера и Света встретились позже Андрея с Денисом, то четырехугольник $PFQE$ невыпуклый, и его диагональ EF лежит вне его. Однако, это не влияет на ход рассуждений.

Критерии оценивания:

- дан верный обоснованный ответ – 5 баллов;
- отсутствует доказательство того, что $AB = CD$, но этот факт использован в рассуждениях – 1 балл.

Task 5. Скотланд-Ярд установил группу из $n \geq 2$ лиц, занимавшейся незаконной кредитной деятельностью, и у инспектора Лестрейда есть подозрение, что в этой группе есть подпольный финансовый магнат, который давал деньги в долг каждому члену группы, но сам никому в этой группе ничего не должен.

Инспектор решает обратиться к мистеру Шерлоку Холмсу за помощью по выявлению этого финансового магната либо опровержению его существования. Шерлок Холмс согласился взяться за расследование, при этом заявив, что в среднем каждому члену группы он задаст не более трех вопросов, причем каждый вопрос будет иметь один и тот же вид: «Вы брали деньги в долг у X?», где в качестве X будет имя того или иного члена этой группы. На такой вопрос член группы ответит «Да» или «Нет», и это будет правдивый ответ, потому что бесполезно пытаться обмануть Шерлока Холмса, и это знают все.

Докажите, что Шерлок Холмс не бросает слов на ветер, то есть он дал выполнимое обещание инспектору Лестрейду.

Решение (RUS). Опишем рекурсивный (по «группе лиц» G) алгоритм расследования $M(G)$, определяющий финансового магната в этой группе G (если он есть), или сообщающий, что в группе G магната нет.

Если группа G состоит из двух членов, то, очевидно, достаточно задать по одному вопросу каждому из них.

Если группа G состоит из трех или более членов (то есть $n > 2$), то пусть $a \neq b$ – два члена этой группы. Затем надо задать вопрос a, брал ли он деньги в долг у b.

- Если a ответит, что брал деньги в долг у b, то выполнить алгоритм $M(G \setminus \{a\})$, где «$\setminus$» – разность множеств (другими словами, найти финансового магната, если он есть, в группе G без a).
  - Если $M(G \setminus \{a\})$ сообщает, что в группе G без a нет финансового магната, тогда его нет и в группе G, и алгоритм $M(G)$ должен сообщить об этом.
  - Если же $M(G \setminus \{a\})$ определил, что в группе G без a есть финансовый магнат g, то спросить этого «кандидата в магнаты», брал ли он деньги в долг у a? Если g брал в долг у a, то в группе G нет финансового магната и $M(G)$ сообщает об этом. А если g не брал в долг у a, то спрашиваем, брал ли a в долг у g, и если да, то $M(G) = g$, а если нет, то в группе G нет магната.
- Если a ответит, что не брал деньги в долг у b, то выполнить алгоритм $M(G \setminus \{b\})$.
  Если $M(G \setminus \{b\})$ сообщает, что в группе G без a нет финансового магната, тогда его нет и в группе G. Если же $M(G \setminus \{b\}) = g$, то возможны варианты: $g = a$ и $g \neq a$.
  - Если $g = a$, то надо спросить у b, брал ли он деньги в долг у a? Если брал, то a – финансовый магнат в группе G, т.е. $M(G) = a$. Если b не брал в долг у a, то в группе G нет финансового магната.
  - Если $g \neq a$, то надо спросить у b, брал ли он деньги в долг у g, а у g – брал ли он деньги в долг у b.
    Если b брал в долг у g, а g не брал у b, то g – финансовый магнат: $M(G) = g$. Если же b не брал в долг у g, или g брал в долг у b, то в группе G нет финансового магната.

На этом описание алгоритма завершено. Корректность его доказывается индукцией по числу n лиц в группе G и прямо следует из разбора случаев в алгоритме ($n = 2$ – база индукции, а $n > 2$ – шаг индукции).

Теперь оценим общее число вопросов «Вы брали деньги в долг у X?», которые задает этот алгоритм: при $n = 2$ достаточно задать каждому члену группы по одному вопросу; если $n > 2$, то при редукции от n к $(n-1)$ задается один вопрос, а потом (когда ответ для $(n-1)$ уже получен) – еще не более двух вопросов. Следовательно, всего задается не более $3(n-1)$ вопросов, то есть в среднем не более $3 \cdot \frac{n-1}{n-1} = 3$ вопросов каждому члену группы.

Критерии оценивания:

- приведено верное доказательство – 5 баллов;
- аргументация неполна при наличии верного хода рассуждений – 3 балла.

Task 6. Заскучав, админы VK Петя и Витя решили сыграть в следующую игру: начиная с Пети, они по очереди записывают в клетки шахматной доски 8×8 натуральные числа от 1 до 64 (в каждой клетке – только одно число), и каждый получает 1 очко за каждую новую (образовавшуюся на их ходу) пару соседних по стороне клеток, содержащих соседние натуральные числа (например, 13 и 14). У кого по итогам игры окажется больше очков, тот и победил. Может ли кто-то из них гарантировать себе победу? Обоснуйте свой ответ.

Answer: Витя может гарантировать себе победу.

Решение (RUS). Рассмотрим вспомогательное утверждение:
Витя может так отвечать на ходы Пети, что число, поставленное Витей, является соседним с числом, поставленным перед ним Петей; при этом набор неиспользованных чисел после каждого хода Вити представляет из себя несколько блоков последовательных чисел, причем в каждом блоке – четное количество чисел.
Доказательство: применим индукцию по количеству ходов Вити. База (0 ходов): до первого хода Пети (после 0 ходов Вити) имеется один блок из 64 последовательных чисел – доказано.
Пусть Вите $k \geq 0$ ходов удавалось отвечать на ходы Пети указанным способом, и пусть Петя сделал свой $(k+1)$-й ход. Докажем, что и сейчас Витя сможет ответить требуемым образом.

Обозначим r число, выбранное Петей на $(k+1)$-м ходу. Перед выбором, по предположению индукции, оно принадлежало некоторому блоку последовательных чисел, в котором было четное количество элементов – $[a, a+1, \ldots, b]$ (a и b имеют разную четность). Также, по предположению индукции, в данный момент игры остальные блоки тоже состоят из четного количества чисел. Тогда, если Вите удастся выбрать $r-1$ или $r+1$ (обозначим его выбор как p) так, чтобы это число принадлежало блоку $[a, a+1, \ldots, b]$ и чтобы после удаления r и p этот блок превратился в ноль, один или два блока (в каждом – четное количество чисел), то утверждение будет доказано.

Отметим, что если $b = a+1$, то выбор Вити однозначен: числа r и p совпадут с числами a и b, и утверждение доказано.

Если $b > a+1$ и Петино число r совпадает с a или b, то Витя выбирает соответственно $p = a+1$ или $p = b-1$, при этом четность количества чисел в блоке сохраняется, и утверждение доказано.

Пусть теперь $b > a+1$ и $a < r < b$. Если r имеет одинаковую четность с a, то $p = r+1$, в противном случае $p = r-1$.
Утверждение полностью доказано.

Приведем победную стратегию для Вити: сначала он мысленно разбивает доску на «доминошки» 2×1 (например, горизонтальные), и очередным ходом выбирает число, соседнее с Петиным r, согласно доказанному выше утверждению – как было доказано, Витя всегда сможет выбрать такое число. Это число он ставит в ту же «доминошку», что и Петя, тем самым заполняя ее.

Таким образом, Витя за один ход добавит как минимум одну пару соседних (по натуральному ряду) чисел в соседние клетки. Кроме того, очевидно, что благодаря такой стратегии Витя будет добавлять такое число на каждом ходу, т.е. гарантирует себе как минимум 32 пары соседних чисел в соседних клетках. Всего есть 63 такие пары среди чисел от 1 до 64 – значит, результат Пети будет не выше 31, и Витя выиграет.

Критерии оценивания:

- дан верный обоснованный ответ – 5 баллов;
- ответ верен и указана стратегия без доказательства – 2 балла;
- ответ верен при почти полном отсутствии аргументации – 1 балл.