

Task 1. Сколькими способами из множества $\{1, 2, 3, \dots, 2024\}$ можно выбрать n чисел так, чтобы сумма любых m (произвольное натуральное число, меньшее n) из выбранных чисел не делилась на 3? Рассмотрите все возможные $n \geq 2$.

Task 2. Преследуя преступника, полицейский упустил его в одном из дворов. В этот двор был единственный вход, а также 3 подъезда, в любом из которых мог скрыться преступник. Известно, что

- если полицейский войдет в подъезд, в котором укрылся преступник, то гарантированно поймает его;
- если полицейский войдет в подъезд, где преступника нет, то с вероятностью $\frac{1}{6}$ тот убежит через выход из двора (и поймать его уже не удастся), с вероятностью $\frac{1}{2}$ преступник никуда не переместится, и с вероятностью $\frac{1}{3}$ спрячется в другом подъезде, где полицейского сейчас нет;
- не найдя преступника в подъезде, полицейский каждый раз выбирает другой подъезд для осмотра совершенно случайным образом.

С какой вероятностью полицейский поймает преступника? Перемещения между подъездами можно считать мгновенными.

Task 3. Даны две окружности Γ_1 и Γ_2 , пересекающиеся в (несовпадающих) точках A, B . К этим окружностям проведены общие внешние касательные, пересекающиеся в точке X . Прямая XA повторно пересекает Γ_1 в точке T_1 , а прямая XB повторно пересекает Γ_2 в точке T_2 . Касательная к Γ_1 в точке T_1 и касательная к Γ_2 в точке T_2 пересекаются в точке Y .

Докажите, что точки X, Y, T_1, T_2 лежат на одной окружности.

Task 4. Про положительные числа a, b, c известно, что $a+b+c = 1$, и каждое из них не превосходит $\frac{1}{2}$. Докажите, что

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + 2(b\sqrt{a} + c\sqrt{b} + a\sqrt{c})$$

Task 5. Петя и Вася разыгрывают призовой фонд, содержащий перед началом игры натуральное число M фунтиков. (Мы не знаем, что такое фунтики, но фунтики бесконечно делимы, например можно «отмерить» $1/\sqrt{2}$ фунтиков). Петя знает секретное (целое) число фунтиков N (из диапазона $0 \leq N \leq M$), которое ему нужно для поездки в Иннополис, а Вася должен угадать это число N .

Игра состоит из раундов «Васина догадка – Петин ответ», которые продолжаются, пока Вася не назовет число N или пока не опустеет призовой фонд. В каждом раунде Вася называет целое число k (из диапазона $0 \leq k \leq M$) и

- если $k < N$, то Петя говорит об этом Васе, после чего игроки просто переходят к следующему раунду;
- если $k > N$, то Петя говорит об этом Васе, забирает из фонда $M/3$ фунтиков, и если в фонде еще остались фунтики, то игроки переходят к следующему раунду;
- если $k = N$, то Петя говорит об этом Васе, затем Вася получает из фонда $(x - n)$ фунтиков, где x – количество фунтиков в фонде на данный момент, а n – количество сыгранных раундов. Если $x \leq n$, то Вася получит 0 фунтиков.

Какое наибольшее число фунтиков может гарантировать себе Вася?

Task 6. В правильном n -угольнике ($n \geq 3$) Коля, аналитик платформы «AllCups», решил сопоставить отрезкам между вершинами (т.е. сторонам и диагоналям) их *важности*, т.е. натуральные числа, удовлетворяющие условиям:

1. для любого треугольника с вершинами в вершинах данного n -угольника важности двух его сторон равны и превосходят важность третьей стороны;
2. важности всех отрезков должны образовывать отрезок натурального ряда, т.е. быть числами $1, 2, 3, \dots, k$ без пропусков, но с повторениями.

Найдите максимальное возможное k .