

8-9th degree

Task 1. Найдите количество слагаемых после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении

$$(x^2 + 8)^{20} \cdot (x^5 + 9)^{24}$$

Task 2. Найдите все трёхзначные (в десятичной записи) числа, которые при делении на 11 дают число, равное сумме квадратов цифр исходного числа.

Task 3. Дан квадрат $ABCD$. Внутри треугольников ABC и ADC отметили точки X и Y соответственно. Оказалось, что отрезки BX и DY параллельны, а угол XAY равен 45° . Докажите, что $XY^2 = BX^2 + DY^2$.

Task 4. Города A, B, C, D расположены вдоль одной дороги в указанном порядке. Андрей и Денис одновременно начали движение навстречу друг другу с равными скоростями из городов A и D , соответственно. В тот же момент времени Вера и Света одновременно начали движение навстречу друг другу с равными скоростями из городов B и C , соответственно. Все четверо двигаются с постоянными скоростями.

Известно, что Андрей встретился со Светой в тот же момент, когда Вера встретила Денисом. Верно ли, что Вера встретила Свету на том же месте, где встретились (или встретятся) Андрей с Денисом? Обоснуйте свой ответ.

Task 5. Скотланд-Ярд установил группу из $n \geq 2$ лиц, занимавшейся незаконной кредитной деятельностью, и у инспектора Лестрейда есть подозрение, что в этой группе есть подпольный финансовый магнат, который давал деньги в долг каждому члену группы, но сам никому в этой группе ничего не должен.

Инспектор решает обратиться к мистеру Шерлоку Холмсу за помощью по выявлению этого финансового магната либо опровержению его существования. Шерлок Холмс согласился взяться за расследование, при этом заявив, что в среднем каждому члену группы он задаст не более трех вопросов, причем каждый вопрос будет иметь один и тот же вид: «Вы брали деньги в долг у X ?», где в качестве X будет имя того или иного члена этой группы. На такой вопрос член группы ответит «Да» или «Нет», и это будет правдивый ответ, потому что бесполезно пытаться обмануть Шерлока Холмса, и это знают все.

Докажите, что Шерлок Холмс не бросает слов на ветер, то есть он дал выполнимое обещание инспектору Лестрейду.

Task 6. Заскучав, админы VK Петя и Витя решили сыграть в следующую игру: начиная с Пети, они по очереди записывают в клетки шахматной доски 8×8 натуральные числа от 1 до 64 (в каждой клетке – только одно число), и каждый получает 1 очко за каждую новую (образовывающуюся на их ходу) пару соседних по стороне клеток, содержащих соседние натуральные числа (например, 13 и 14). У кого по итогам игры окажется больше очков, тот и победил. Может ли кто-то из них гарантировать себе победу? Обоснуйте свой ответ.