Task 1.

1. Дан многочлен $P(x) = -2x^3 + bx^2 + cx + d$, причем $P(2) = 2$, $P(3) = 7$, и $P(x) \geq 3x - 4$ для всех $x < 3$. Вычислите наименьшее возможное значение $P(0)$ и запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   Consider a polynomial $P(x) = -2x^3+bx^2+cx+d$ such that $P(2) = 2$, $P(3) = 7$ and $P(x) \geq 3x-4$ for all $x < 3$. Find least possible value of $P(0)$ and write your answer as integer of decimal rounded to hundredth if needed.

   Answer: 28

2. Дан многочлен $P(x) = -0.01x^3+bx^2+cx+d$, причем $P(-1) = -1$, $P(4) = 13$, и $P(x) \geq 2x+1$ для всех $x < 1$. Вычислите наименьшее возможное значение $P(0)$ и запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   Consider a polynomial $P(x) = -0.01x^3 + bx^2 + cx + d$ such that $P(-1) = -1$, $P(4) = 13$ and $P(x) \geq 2x + 1$ for all $x < 1$. Find least possible value of $P(0)$ and write your answer as integer of decimal rounded to hundredth if needed.

   Answer: 0.8

3. Дан многочлен $P(x) = -x^3 + bx^2 + cx + d$, причем $P(5) = 3$, $P(4) = -1$, и $P(x) \geq 2x - 7$ для всех $x \in (3; 8)$. Вычислите наименьшее возможное значение $P(0)$ и запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   Consider a polynomial $P(x) = -x^3+bx^2+cx+d$ such that $P(5) = 3$, $P(4) = -1$ and $P(x) \geq 2x-7$ for all $x \in (3; 8)$. Find least possible value of $P(0)$ and write your answer as integer of decimal rounded to hundredth if needed.

   Answer: 43

4. Дан многочлен $P(x) = 5x^3 + bx^2 + cx + d$, причем $P(-4) = 5$, $P(-2) = 3$, и $P(x) \geq 4x + 11$ для всех $x > -4$. Вычислите наибольшее возможное значение $P(0)$ и запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   Consider a polynomial $P(x) = 5x^3 + bx^2 + cx + d$ such that $P(-4) = 5$, $P(-2) = 3$ and $P(x) \geq 4x + 11$ for all $x > -4$. Find largest possible value of $P(0)$ and write your answer as integer of decimal rounded to hundredth if needed.

   Answer: 101

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть $f(x) = 3x - 4$, тогда $f(2) = 2$. Многочлен $Q(x) = P(x) - f(x)$ является кубическим, причем $Q(2) = P(2) - f(2) = 0$ и в то же время $Q(x) \geq 0$ при $x < 3$ – а значит, график $Q(x)$ касается оси абсцисс в точке $(2; 0)$.
Таким образом, многочлен $Q(x)$ можно представить в виде $-2(x - 2)^2(x - t)$, где $t \geq 3$. Также известно, что $P(3) = 7$, откуда $Q(3) = P(3) - f(3) = 7 - 5 = 2$, т.е. $-2(3 - 2)^2(3 - t) = 2$. Получим $t = 4$ и $P(0) = Q(0) + f(0) = -2(0 - 2)^2(0 - 4) + 3 \cdot 0 - 4 = 28$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let $f(x) = 3x - 4$, then $f(2) = 2$. Polynomial $Q(x) = P(x) - f(x)$ is cubic with $Q(2) = P(2) - f(2) = 0$

with $Q(x) \geq 0$ for $x < 3$ – thus, graph $Q(x)$ touches X-axis in the point $(2; 0)$.
Consequently, $Q(x)$ can be expressed as $-2(x-2)^2(x-t)$, while $t \geq 3$. We also know that $P(3) = 7$, thus $Q(3) = P(3) - f(3) = 7 - 5 = 2$, i.e. $-2(3-2)^2(3-t) = 2$. We get $t = 4$ and $P(0) = Q(0) + f(0) = -2(0-2)^2(0-4) + 3 \cdot 0 - 4 = 28$.

Task 2.

1. Дано множество натуральных чисел, не превосходящих 15. Сколькими способами можно выбрать из него подмножество, содержащее хотя бы два простых числа?

   Consider a set of all positive integers less than or equal to 15. How many ways are there to choose its subset which contains at least two prime numbers?

   Answer: 29184

2. Дано множество натуральных чисел, не превосходящих 17. Сколькими способами можно выбрать из него подмножество, содержащее хотя бы два простых числа?

   Consider a set of all positive integers less than or equal to 17. How many ways are there to choose its subset which contains at least two prime numbers?

   Answer: 122880

3. Дано множество натуральных чисел, не превосходящих 13. Сколькими способами можно выбрать из него подмножество, содержащее хотя бы два простых числа?

   Consider a set of all positive integers less than or equal to 17. How many ways are there to choose its subset which contains at least two prime numbers?

   Answer: 7296

4. Дано множество натуральных чисел, не превосходящих 16. Сколькими способами можно выбрать из него подмножество, содержащее хотя бы два простых числа?

   Consider a set of all positive integers less than or equal to 16. How many ways are there to choose its subset which contains at least two prime numbers?

   Answer: 58368

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Есть ровно 2^n способов выбрать подмножество из множества с n элементами – значит, из данного множества (назовем его A) можно выбрать подмножество $2^{15} = 32768$ способами. Множество A содержит шесть простых чисел $(2, 3, 5, 7, 11, 13)$, остальные девять не являются простыми, и составить подмножество только с ними можно $2^9 = 512$ способами. Каждому из указанных подмножеств соответствуют еще шесть, содержащих по одному простому числу – итого $512 + 512 \cdot 6 = 3584$ подмножества, содержащих не более одного простого числа. Остальные подмножества A будут содержать не менее двух простых чисел, и их количество равно $32768 - 3584 = 29184$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* There are 2^n ways to choose subset of a set with n elements, thus there are $2^{15} = 32768$ ways to choose subset from the initial set (lets denote it as A). There are 6 primes $(2, 3, 5, 7, 11, 13)$ in the set, so other 9 numbers are not prime and we can choose $2^9 = 512$ subsets of A using only these 9 non-primes with each of these subsets corresponding to 6 other subsets of A which contain one prime each – thus, we've already counted $512 + 512 \cdot 6 = 3584$ subsets of A with no more than one prime each. Other $32768 - 3584 = 29184$ subsets will contain at least two prime each.

Task 3.

1. Две команды – «Быки» и «Драконы» – играют в волейбол друг против друга, начальный счёт в их матче – 0 : 0, и никакая партия матча не может окончиться вничью. Команда, первой набравшая 2 очка, объявляется победителем матча. Очки начисляются и снимаются по следующим правилам:

   - если у команды 1 очко, то в случае ее поражения в партии это очко снимается;
   - если у команды 0 очков, то в случае ее поражения в партии очко присваивается команде-сопернику.

   С какой вероятностью «Быки» станут победителем матча, если вероятность их победы в каждой отдельной партии равна 0.6? Запишите ответ в виде десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   Two teams – «Bulls» and «Dragons» – play volleyball match against each other, the initial score in the match is 0 : 0, and no game of the match can end in a draw. The team that scored 2 points first is declared the winner of the match. Points are awarded and deducted according to the following rules:

   - if a team has 1 point, then if it loses the game, this point is deducted;
   - if a team has 0 points, then if it loses the game, a point is given to the opposing team.

   What is the probability of «Bulls» being the winner of the match, if the probability of their victory in each individual game is 0.6? Write your answer as a decimal, rounding to the nearest hundredth if necessary.

   Answer: 0.69

2. Две команды – «Быки» и «Драконы» – играют в волейбол друг против друга, начальный счёт в их матче – 0 : 0, и никакая партия матча не может окончиться вничью. Команда, первой набравшая 2 очка, объявляется победителем матча. Очки начисляются и снимаются по следующим правилам:

   - если у команды 1 очко, то в случае ее поражения в партии это очко снимается;
   - если у команды 0 очков, то в случае ее поражения в партии очко присваивается команде-сопернику.

   С какой вероятностью «Быки» станут победителем матча, если вероятность их победы в каждой отдельной партии равна 0.2? Запишите ответ в виде десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   Two teams – «Bulls» and «Dragons» – play volleyball match against each other, the initial score in the match is 0 : 0, and no game of the match can end in a draw. The team that scored 2 points first is declared the winner of the match. Points are awarded and deducted according to the following rules:

   - if a team has 1 point, then if it loses the game, this point is deducted;
   - if a team has 0 points, then if it loses the game, a point is given to the opposing team.

   What is the probability of «Bulls» being the winner of the match, if the probability of their victory in each individual game is 0.2? Write your answer as a decimal, rounding to the nearest hundredth if necessary.

   Answer: 0.06

3. Две команды – «Быки» и «Драконы» – играют в волейбол друг против друга, начальный счёт в их матче – 0 : 0, и никакая партия матча не может окончиться вничью. Команда, первой набравшая 2 очка, объявляется победителем матча. Очки начисляются и снимаются по следующим правилам:

   - если у команды 1 очко, то в случае ее поражения в партии это очко снимается;
   - если у команды 0 очков, то в случае ее поражения в партии очко присваивается команде-сопернику.

   С какой вероятностью «Быки» станут победителем матча, если вероятность их победы в каждой отдельной партии равна 1/3? Запишите ответ в виде десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   Two teams – «Bulls» and «Dragons» – play volleyball match against each other, the initial score in the match is 0 : 0, and no game of the match can end in a draw. The team that scored 2 points first is declared the winner of the match. Points are awarded and deducted according to the following rules:

   - if a team has 1 point, then if it loses the game, this point is deducted;
   - if a team has 0 points, then if it loses the game, a point is given to the opposing team.

   What is the probability of «Bulls» being the winner of the match, if the probability of their victory in each individual game is 1/3? Write your answer as a decimal, rounding to the nearest hundredth if necessary.

   Answer: 0.2

4. Две команды – «Быки» и «Драконы» – играют в волейбол друг против друга, начальный счёт в их матче – 0 : 0, и никакая партия матча не может окончиться вничью. Команда, первой набравшая 2 очка, объявляется победителем матча. Очки начисляются и снимаются по следующим правилам:

   - если у команды 1 очко, то в случае ее поражения в партии это очко снимается;
   - если у команды 0 очков, то в случае ее поражения в партии очко присваивается команде-сопернику.

   С какой вероятностью «Быки» станут победителем матча, если вероятность их победы в каждой отдельной партии равна 0.25? Запишите ответ в виде десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   Two teams – «Bulls» and «Dragons» – play volleyball match against each other, the initial score in the match is 0 : 0, and no game of the match can end in a draw. The team that scored 2 points first is declared the winner of the match. Points are awarded and deducted according to the following rules:

   - if a team has 1 point, then if it loses the game, this point is deducted;
   - if a team has 0 points, then if it loses the game, a point is given to the opposing team.

   What is the probability of «Bulls» being the winner of the match, if the probability of their victory in each individual game is 0.25? Write your answer as a decimal, rounding to the nearest hundredth if necessary.

   Answer: 0.1

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть вероятность победы «Быков» равна P. Тогда, если первую партию они выигрывают, то вторая партия станет последней в матче (с победой «Быков») с вероятностью $0.6 \cdot 0.6 = 0.36$. Если же первую партию они выигрывают, а вторую проигрывают (это событие наступит с вероятностью $0.6 \cdot 0.4 = 0.24$), то счет матча обнуляется, и «Быки» победят в нем с вероятностью P. Если «Быки» проигрывают первую партию и выигрывают во второй, то снова счет обнуляется. Единственный оставшийся исход первых двух партий – двукратное поражение «Быков» – уже не может привести к их победе в матче.

Итак, вероятность P победы «Быков» в матче складывается из трех вероятностей, соответствующих описанным выше событиям:

$$P = 0.36 + 0.24 \cdot P + 0.24 \cdot P$$

Решая это уравнение, найдем $P = 9/13 \approx 0.69$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let the probability of «Bulls» winning the match be equal to P. Then, if they win the first game, the second one will be the last in the match (with the victory of «Bulls») with probability $0.6 \cdot 0.6 = 0.36$. If they win the first game and lose the second one (this event occurs with probability $0.6 \cdot 0.4 = 0.24$), then the match score is reset to 0:0, and the «Bulls» will win it with probability P. If «Bulls» lose the first game and win the second one, then the score is reset to 0:0, too. The only remaining outcome of the first two games (i.e. two defeats for the «Bulls») can no longer lead to their victory in the match.

So, the probability of «Bulls» winning the match is the sum of three probabilities corresponding to the events described above:

$$P = 0.36 + 0.24 \cdot P + 0.24 \cdot P$$

Solving this equation, we get $P = 9/13 \approx 0.69$.

Task 4.

1. Дан клетчатый прямоугольник 68×2023, разбитый на клетки 1×1, и проведена его диагональ. Определите количество клеток, через которые проходит эта диагональ.

   Given a rectangle 68×2023, divided into 1×1 cells, with its diagonal drawn. Determine the number of cells the diagonal passes through.

   Answer: 2074

2. Дан клетчатый прямоугольник 96×552, разбитый на клетки 1×1, и проведена его диагональ. Определите количество клеток, через которые проходит эта диагональ.

   Given a rectangle 96×552, divided into 1×1 cells, with its diagonal drawn. Determine the number of cells the diagonal passes through.

   Answer: 624

3. Дан клетчатый прямоугольник 2023×1309, разбитый на клетки 1×1, и проведена его диагональ. Определите количество клеток, через которые проходит эта диагональ.

   Given a rectangle 2023×1309, divided into 1×1 cells, with its diagonal drawn. Determine the number of cells the diagonal passes through.

   Answer: 3213

4. Дан клетчатый прямоугольник 415×166, разбитый на клетки 1×1, и проведена его диагональ. Определите количество клеток, через которые проходит эта диагональ.

   Given a rectangle 415×166, divided into 1×1 cells, with its diagonal drawn. Determine the number of cells the diagonal passes through.

   Answer: 498

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Для начала докажем, что для взаимно простых m, n в клетчатом прямоугольнике $m \times n$ диагональ проходит через $m + n - 1$ клеток. Действительно, поскольку m и n взаимно просты, диагональ не пройдет через вершины клеток (за исключением своих концов), а значит, каждое пересечение стороны клетки означает переход в следующую клетку. В прямоугольнике $m \times n$ диагональ пересечет $(m-1)$ прямую, параллельную одной из сторон прямоугольника (и содержащую стороны единичных клеток), и $(n-1)$ прямую, параллельную другой стороне прямоугольника – таким образом, диагональ пересечет $(m-1)+(n-1)+1 = m+n-1$ клеток, что и требовалось доказать.

Очевидно, если НОД$(m, n) = d > 1$, то диагональ пройдет через $d - 1$ вершин клеток (за исключением своих концов), и d равных отрезков, на которые она будет разбита этими вершинами, являются диагоналями прямоугольников $\frac{m}{d} \times \frac{n}{d}$, где НОД$(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}) = 1$. Значит, в каждом таком прямоугольнике диагональ пройдет через $\frac{m}{d} + \frac{n}{d} - 1$ клеток, а всего таких прямоугольников – d штук, т.е. общее количество клеток, через которые пройдет диагональ, равно $d \cdot (\frac{m}{d} + \frac{n}{d} - 1) = m + n - d$. Используя эту формулу для $m = 68$, $n = 2023$ (тогда $d = 17$), получим 2074.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* First, lets prove that for coprime m, n in a checkered rectangle $m \times n$ the diagonal passes through $m + n - 1$ cells. Indeed, since m and n are relatively prime, the diagonal will not pass through the vertices of the cells (except for its ends), which means that each intersection of the side of the cell means a transition to the next cell. In a rectangle $m \times n$ the diagonal will intersect an $(m - 1)$ line parallel to one of the sides of the rectangle (and containing the sides of unit cells) and a $(n-1)$ line parallel to the other side of the rectangle, thus, the diagonal will cross $(m - 1) + (n - 1) + 1 = m + n - 1$ cells, which is what needed to be proven.

Obviously, if GCD$(m, n) = d > 1$, then the diagonal will pass through $d - 1$ vertices of the cells (except for its ends), and d equal segments (into which it will be divided by these vertices) are diagonals of rectangles $\frac{m}{d} \times \frac{n}{d}$, where GCD$(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}) = 1$. By that, in each such rectangle the diagonal will pass through $\frac{m}{d} + \frac{n}{d} - 1$ cells, and there are d such rectangles in total, i.e. the total number of cells the diagonal will pass through is equal to $d \cdot (\frac{m}{d} + \frac{n}{d} - 1) = m + n - d$. Using this formula for $m = 68$, $n = 2023$ (then $d = 17$), we get 2074.

Task 5.

1. В треугольной комнате с углами A, B, C установлена непрозрачная перегородка CO (от пола до потолка) так, что из угла B видна ровно половина стены AC, а из угла A – ровно треть стены BC. Игорь хочет установить в комнате умную колонку «VK Капсула» с Марусей так, чтобы любая прямая, параллельная полу комнаты и проходящая через колонку, пересекала либо перегородку CO, либо стену AB. Стены комнаты и перегородка перпендикулярны полу и имеют форму прямоугольников, колонку можно считать точечным объектом.
   Какая часть площади комнаты подходит Игорю для установки колонки?

   In a triangular room with corners A, B, C, a new opaque wall CO (from the floor to the ceiling) is installed in such way that exactly half of the wall AC is visible from the corner B, and exactly a third of the BC wall is visible from the corner A. Igor wants to install a smart speaker «VK Capsule» with Marusya in the room so that any straight line parallel to the floor of the room and passing through the speaker will intersect either the wall CO or the wall AB. The walls of the

room are perpendicular to the floor and have the shape of rectangles; the smart speaker can be considered a point object.
What part of the room area is suitable for installing the speaker in the way Igor wants?

Answer: $\frac{5}{12}$

2. В треугольной комнате с углами A, B, C установлена непрозрачная перегородка CO (от пола до потолка) так, что из угла B видна ровно половина стены AC, а из угла A – ровно четверть стены BC. Игорь хочет установить в комнате умную колонку «VK Капсула» с Марусей так, чтобы любая прямая, параллельная полу комнаты и проходящая через колонку, пересекала либо перегородку CO, либо стену AB. Стены комнаты и перегородка перпендикулярны полу и имеют форму прямоугольников, колонку можно считать точечным объектом.
Какая часть площади комнаты подходит Игорю для установки колонки?

In a triangular room with corners A, B, C, a new opaque wall CO (from the floor to the ceiling) is installed in such way that exactly half of the wall AC is visible from the corner B, and exactly a quarter of the BC wall is visible from the corner A. Igor wants to install a smart speaker «VK Capsule» with Marusya in the room so that any straight line parallel to the floor of the room and passing through the speaker will intersect either the wall CO or the wall AB. The walls of the room are perpendicular to the floor and have the shape of rectangles; the smart speaker can be considered a point object.
What part of the room area is suitable for installing the speaker in the way Igor wants?

Answer: $\frac{9}{20}$

3. В треугольной комнате с углами A, B, C установлена непрозрачная перегородка CO (от пола до потолка) так, что из угла B видна ровно треть стены AC, а из угла A – ровно четверть стены BC. Игорь хочет установить в комнате умную колонку «VK Капсула» с Марусей так, чтобы любая прямая, параллельная полу комнаты и проходящая через колонку, пересекала либо перегородку CO, либо стену AB. Стены комнаты и перегородка перпендикулярны полу и имеют форму прямоугольников, колонку можно считать точечным объектом.
Какая часть площади комнаты подходит Игорю для установки колонки?

In a triangular room with corners A, B, C, a new opaque wall CO (from the floor to the ceiling) is installed in such way that exactly a third of the wall AC is visible from the corner B, and exactly a quarter of the BC wall is visible from the corner A. Igor wants to install a smart speaker «VK Capsule» with Marusya in the room so that any straight line parallel to the floor of the room and passing through the speaker will intersect either the wall CO or the wall AB. The walls of the room are perpendicular to the floor and have the shape of rectangles; the smart speaker can be considered a point object.
What part of the room area is suitable for installing the speaker in the way Igor wants?

Answer: $\frac{7}{12}$

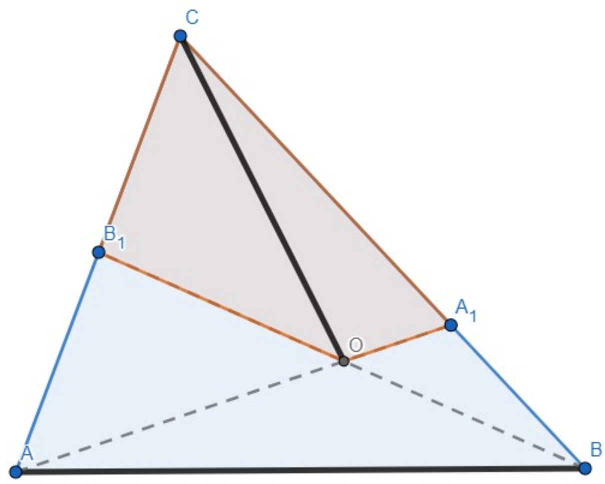
4. В треугольной комнате с углами A, B, C установлена непрозрачная перегородка CO (от пола до потолка) так, что из угла B видна ровно треть стены AC, а из угла A – ровно одна пятая часть стены BC. Игорь хочет установить в комнате умную колонку «VK Капсула» с Марусей так, чтобы любая прямая, параллельная полу комнаты и проходящая через колонку, пересекала либо перегородку CO, либо стену AB. Стены комнаты и перегородка перпендикулярны полу и имеют форму прямоугольников, колонку можно считать точечным объектом.
Какая часть площади комнаты подходит Игорю для установки колонки?

In a triangular room with corners A, B, C, a new opaque wall CO (from the floor to the ceiling) is installed in such way that exactly a third of the wall AC is visible from the corner B, and exactly a fifth of the BC wall is visible from the corner A. Igor wants to install a smart speaker «VK Capsule» with Marusya in the room so that any straight line parallel to the floor of the room and passing through the speaker will intersect either the wall CO or the wall AB. The walls of the room are perpendicular to the floor and have the shape of rectangles; the smart speaker can be considered a point object.

What part of the room area is suitable for installing the speaker in the way Igor wants?

Answer: $\frac{64}{105}$

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Рассмотрим вид сверху: стены комнаты станут сторонами треугольника, а перегородка – отрезком, соединяющим его вершину с одной из внутренних точек. Тогда задачу можно переформулировать следующим образом: найти площадь геометрического места внутренних точек (ГМТ) P треугольника ABC, таких, что любая прямая, проходящая через P, пересекает либо AB, либо CO. Пусть прямые AO, BO пересекают стороны BC, AB треугольника в точках A_1, B_1, соответственно.



Докажем, что искомым ГМТ является четырехугольник CA_1OB_1. Рассмотрим произвольную внутреннюю точку этого четырехугольника; без ограничения общности будем считать ее внутренней точкой треугольника CB_1O. Проведем через P некоторую прямую l и предположим, что она не пересекает CO. Из этого следует, что она пересекает отрезки OB_1, CB_1. Пусть l пересекает B_1C в точке T. Тогда луч TP является внутренним для угла B_1TO, причем луч TO пересекает сторону AB исходного треугольника – а значит, луч TP также пересекает ее. Итак, любая внутренняя точка четырехугольника CA_1OB_1 входит в искомое ГМТ.

Теперь рассмотрим точки вне упомянутого четырехугольника и покажем, что они не обладают требуемым для искомого ГМТ свойством. Для внешних точек треугольника ABC это совсем очевидно (подлходит, например, прямая, проходящая через данную внешнюю точку параллельно одной из сторон $\triangle ABC$), для внутренних точек треугольника AOB – тоже (достаточно провести через данную точку прямую, параллельную AB). Остались два треугольника – AOB_1 и BOA_1. Рассмотрим первый из них (второй рассматривается аналогично). Итак, пусть P – внутренняя точка $\triangle AOB_1$. Проведем прямую PK, где K – произвольная точка отрезка BO, отличная от его концов: такая прямая не пересечет ни CO, ни AB.

Утверждение доказано.

Итак, требуется найти $\frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ABC}}$, причем $\frac{AB_1}{AC} = \frac{1}{2}$, $\frac{BA_1}{BC} = \frac{1}{3}$ по условию. Согласно теореме Менелая, $\frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{A_1B}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, откуда $\frac{AO}{OA_1} = 3 \Rightarrow \frac{AO}{AA_1} = \frac{3}{4}$. Далее

$$\frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ABC}} = \frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ACA_1}} \cdot \frac{S_{ACA_1}}{S_{ABC}} = \left(1 - \frac{S_{AOB_1}}{S_{ACA_1}}\right) \cdot \frac{CA_1}{CB} =$$

$$\left(1 - \frac{AO}{AA_1} \cdot \frac{AB_1}{AC}\right) \cdot \frac{CA_1}{CB} = \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\right)\frac{2}{3} = \frac{5}{12}$$

Критерии оценивания:

- участник правильно понял условие, правильно определил соотношение отрезков на сторонах треугольника – 1 балл;
- определено искомое ГМТ (четырехугольник CA_1OB_1) – 1 балл;
- доказано, что четырехугольник CA_1OB_1 и есть искомое ГМТ – 1 балл;
- верно вычислено искомое отношение – 2 балла;
- допущена арифметическая ошибка, приведшая к неверному ответу – минус 1 балл.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let's look from the top to the room: its walls AB, BC, CA will become the sides of the triangle, and the wall CO will become a segment connecting its vertex with one of the internal points. Then the problem can be reformulated as follows: find the area of the locus of the interior points P of the triangle ABC, such that any line passing through P intersects either AB or CO. Let the lines AO, BO intersect the sides BC, AB of the triangle at points A_1, B_1, respectively.

Let us prove that the required locus is the quadrilateral CA_1OB_1. Consider an arbitrary internal point of the quadrilateral; without loss of generality, we will consider it an internal point of the triangle CB_1O. Lets draw some line l through P and assume that it does not intersect CO. Then it intersects the segments OB_1, CB_1. Let l intersect B_1C at point T. Then the ray TP is internal to the angle B_1TO, and the ray TO intersects the side AB of the original triangle – and therefore the ray TP also intersects it. So, any internal point of the quadrilateral CA_1OB_1 is included in the desired locus.
Now let's consider points outside the mentioned quadrilateral and show that they do not have the property required for the desired locus. For external points of triangle ABC this is quite obvious (for example, a straight line passing through a given external point parallel to one of the sides of $\triangle ABC$ is suitable), for internal points of triangle AOB its obvious, too (it is enough to draw a straight line through this point parallel to AB). There are two triangles left – AOB_1 and BOA_1. Let's consider the first of them (the second one is considered similarly). So, let P be the internal point of $\triangle AOB_1$. Lets draw a line PK, where K is an arbitrary point of the segment BO that is different from its ends: such a line will not intersect either CO or AB.
Q.E.D.

So, we need to calculate $\frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ABC}}$ with $\frac{AB_1}{AC} = \frac{1}{2}$, $\frac{BA_1}{BC} = \frac{1}{3}$. Using Menelaus's theorem, we get $\frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{A_1B}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, thus $\frac{AO}{OA_1} = 3 \Rightarrow \frac{AO}{AA_1} = \frac{3}{4}$. Finally,

$$\frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ABC}} = \frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ACA_1}} \cdot \frac{S_{ACA_1}}{S_{ABC}} = (1 - \frac{S_{AOB_1}}{S_{ACA_1}}) \cdot \frac{CA_1}{CB} =$$

$$(1 - \frac{AO}{AA_1} \cdot \frac{AB_1}{AC}) \cdot \frac{CA_1}{CB} = (1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2})\frac{2}{3} = \frac{5}{12}$$

Criteria:

- the participant correctly understood the task's formulation, correctly determined the ratio of the segments on the sides of the triangle – 1 point;
- the quadrilateral CA_1OB_1 is considered to be the required locus – 1 point;
- it is proved that the quadrilateral CA_1OB_1 is the required locus – 1 point;
- the required ratio is correctly calculated – 2 points;
- an arithmetic error was made, which led to an incorrect answer – minus 1 point.

Task 6.

1. Есть точные чашечные весы (чашки вмещают любой объем), гирька весом в n грамм (n – натуральное число), мешок сахарного песка и совочек. Дополнительных ёмкостей нет, в чашке две кучки сахара сразу смешиваются. Найдите все n, для которых существует алгоритм, позволяющий отмерить m грамм сахара для любого натурального m. Определите минимальное число взвешиваний для $n = 1$, $m = 2023$.

   There are weighing scale (its cups can hold any volume), an n gram weight, a bag of granulated sugar and a scoop. There are no additional containers; in a cup, two piles of sugar are immediately mixed. Find all positive integers n such that we can obtain an m grams of sugar for an arbitrary positive integer m. Determine the minimum number of weighings required for $n = 1$, $m = 2023$.

   Answer: 11

2. Есть точные чашечные весы (чашки вмещают любой объем), гирька весом в n грамм (n – натуральное число), мешок сахарного песка и совочек. Дополнительных ёмкостей нет, в чашке две кучки сахара сразу смешиваются. Найдите все n, для которых существует алгоритм, позволяющий отмерить m грамм сахара для любого натурального m. Определите минимальное число взвешиваний для $n = 2$, $m = 2024$.

   There are weighing scale (its cups can hold any volume), an n gram weight, a bag of granulated sugar and a scoop. There are no additional containers; in a cup, two piles of sugar are immediately mixed. Find all positive integers n such that we can obtain an m grams of sugar for an arbitrary positive integer m. Determine the minimum number of weighings required for $n = 2$, $m = 2024$.

   Answer: 10

3. Есть точные чашечные весы (чашки вмещают любой объем), гирька весом в n грамм (n – натуральное число), мешок сахарного песка и совочек. Дополнительных ёмкостей нет, в чашке две кучки сахара сразу смешиваются. Найдите все n, для которых существует алгоритм, позволяющий отмерить m грамм сахара для любого натурального m. Определите минимальное число взвешиваний для $n = 1$, $m = 199$.

   There are weighing scale (its cups can hold any volume), an n gram weight, a bag of granulated sugar and a scoop. There are no additional containers; in a cup, two piles of sugar are immediately mixed. Find all positive integers n such that we can obtain an m grams of sugar for an arbitrary positive integer m. Determine the minimum number of weighings required for $n = 1$, $m = 199$.

   Answer: 8

4. Есть точные чашечные весы (чашки вмещают любой объем), гирька весом в n грамм (n – натуральное число), мешок сахарного песка и совочек. Дополнительных ёмкостей нет, в чашке две кучки сахара сразу смешиваются. Найдите все n, для которых существует алгоритм, позволяющий отмерить m грамм сахара для любого натурального m. Определите минимальное число взвешиваний для $n = 2$, $m = 198$.

   There are weighing scale (its cups can hold any volume), an n gram weight, a bag of granulated sugar and a scoop. There are no additional containers; in a cup, two piles of sugar are immediately mixed. Find all positive integers n such that we can obtain an m grams of sugar for an arbitrary positive integer m. Determine the minimum number of weighings required for $n = 2$, $m = 198$.

   Answer: 7

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть k – количество грамм сахара на одной из чаш весов. За одно взвешивание мы можем удвоить k (положив на другую чашу весов столько же сахара, уравновесив чаши) или разделить k пополам (разделив имеющуюся кучку на две равные по весу). Имея дополнительно гирю массой n грамм, мы можем за одно взвешивание получить $k+n$ или $k-n$ грамм. Сочетая описанные действия, можно за одно взвешивание получить $2k+n$ или $2k-n$ грамм.

Докажем индукцией по m, что с помощью гири весом в $n=2^t$ грамм (для любого целого $t \geq 0$) можно взвесить m грамм для любого натурального m.
База индукции ($m=1$):

$$2^t \to 2^{t-1} \to \cdots \to 2^0 = 1$$

Пусть мы можем взвесить k грамм сахара. Тогда построим следующую последовательность операций для получения $k+1$ грамм сахара:

$$k \to 2k \to 2^2k \to \cdots \to 2^tk \to 2^tk + 2^t \to 2^{t-1}k + 2^{t-1} \to \cdots \to k+1$$

(потребовалось $2t+1$ взвешиваний)
Доказано.

Теперь докажем, что для прочих n (не равных 2^t ни для какого целого неотрицательного t) невозможно получить 1 грамм сахара. Действительно, пусть n кратно некоторому простому $p \neq 2$, тогда и умножение на 2, и деление на 2, и прибавление n оставляет взвешиваемое количество грамм сахара кратным p, в то время как 1, очевидно, не кратно p.

$$2023 = 2\cdot 1011+1 = 2\cdot(2\cdot 505+1)+1 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 252+1)+1)+1 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 2\cdot 126+1)+1)+1 = \cdots$$

$$\cdots = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1-1)+1)+1)+1$$

– здесь количество умножений на 2 равно количеству взвешиваний, т.е. 11 взвешиваний хватит:

$$0 \to 1 \to 3 \to 7 \to 15 \to 31 \to 63 \to 127 \to 253 \to 506 \to 1012 \to 2023$$

Покажем, что 10 взвешиваний всегда недостаточно. Для этого сначала заметим, что в условиях задачи, имея гирю в n грамм и кучку в k грамм сахара, за одно взвешивание мы можем получить не более $2k+n$ грамм сахара. Тогда наибольший возможный вес, который можно отмерить за 10 взвешиваний, равен

$$0 \to 1 \to 3 \to 7 \to 15 \to 31 \to 63 \to 127 \to 255 \to 511 \to 1023$$

грамма.

Критерии оценивания:

- приведена идея, что $n=2^t$ – 1 балл;
- доказано, что при $n \neq 2^t$ условие не выполняется – 2 балла;
- приведена верная оценка количества взвешиваний – 1 балл;
- приведен пример с нужным количеством взвешиваний – 1 балл;
- допущены незначительные ошибки, не повлиявшие на ход рассуждений – минус 1 балл.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let k be the number of grams of sugar on one of the cups. During one weighing we can double k (putting the same amount of sugar on the other cup of the scale, balancing the cups) or divide k in half (dividing the existing cup into two equally weighting ones). Having an additional weight of n grams, we can obtain $k+n$ or $k-n$ grams in one weighing. By combining the described actions we can obtain $2k+n$ or

$2k - n$ grams in one weighing.

Lets prove by induction on m, that we can obtain m grams (for any positive integer m) using additional weight of $n = 2^t$ grams for any non-negative integer t.
Base of induction ($m = 1$):

$$2^t \to 2^{t-1} \to \dots \to 2^0 = 1$$

Consider we succeeded to obtain k grams of sugar. Then we can use the following sequence of weighings to obtain $k+1$ grams of sugar:

$$k \to 2k \to 2^2k \to \dots \to 2^tk \to 2^tk + 2^t \to 2^{t-1}k + 2^{t-1} \to \dots \to k+1$$

(total of $2t+1$ weighings)
Q.E.D.

Now lets prove that for other n (not equal to 2^t for any non-negative integer t) it is impossible to obtain 1 grams of sugar. Indeed, let n be a multiple of some prime $p \neq 2$, then multiplying by 2, or dividing by 2, or adding n leaves the weighed amount of grams a multiple of p, while 1 is obviously not a multiple of p.

$$2023 = 2\cdot1011+1 = 2\cdot(2\cdot505+1)+1 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot252+1)+1)+1 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot2\cdot126+1)+1)+1 = \cdots$$

$$\cdots = 2\cdot(2\cdot(2\cdot2\cdot2\cdot(2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot1-1)+1)+1)+1$$

– here the number of multiplications by 2 is equal to the number of weightings, thus 11 of them is enough to obtain 2023 grams of sugar:

$$0 \to 1 \to 3 \to 7 \to 15 \to 31 \to 63 \to 127 \to 253 \to 506 \to 1012 \to 2023$$

Lets prove that 10 weighings are never enough for it. To do that, first note that while having a weight of n grams and a pile of k grams of sugar, we can obtain at most $2k+n$ grams of sugar with one weighing. Then the largest possible weight that can be obtained with 10 weighings is

$$0 \to 1 \to 3 \to 7 \to 15 \to 31 \to 63 \to 127 \to 255 \to 511 \to 1023$$

grams.

Criteria:

- the idea is given that $n = 2^t$ – 1 point;
- it is proven that for $n \neq 2^t$ the conditions are not satisfied – 2 points;
- shown the correct estimate of the number of weighings – 1 point;
- an example is given with the required number of weighings – 1 point;
- minor errors were made that did not affect the course of reasoning – minus 1 point.