Task 1.

1. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

   - восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
   - восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
   - ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
   - восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

   Изначально были проблемы с 10 аккаунтами пользователей, и 15 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. За какое минимальное время (в минутах) Игорь сможет добиться этого?

   Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

   - restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
   - restore two accounts – then a new question from the user will appear;
   - answer one user question – then two new questions will appear;
   - restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

   Initially, there were problems with 10 user accounts, and 15 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. In what minimum amount of time (in minutes) can Igor achieve this?

   Answer: 24

2. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

   - восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
   - восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
   - ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
   - восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

   Изначально были проблемы с 14 аккаунтами пользователей, и 15 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. За какое минимальное время (в минутах) Игорь сможет добиться этого?

Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

- restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
- restore two accounts – then a new question from the user will appear;
- answer one user question – then two new questions will appear;
- restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

Initially, there were problems with 14 user accounts, and 15 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. In what minimum amount of time (in minutes) can Igor achieve this?

Answer: 28

3. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

- восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
- восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
- ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
- восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

Изначально были проблемы с 12 аккаунтами пользователей, и 18 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. За какое минимальное время (в минутах) Игорь сможет добиться этого?

Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

- restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
- restore two accounts – then a new question from the user will appear;
- answer one user question – then two new questions will appear;
- restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

Initially, there were problems with 12 user accounts, and 18 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. In what minimum amount of time (in minutes) can Igor achieve this?

Answer: 29

4. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

   - восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
   - восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
   - ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
   - восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

   Изначально были проблемы с 15 аккаунтами пользователей, и 10 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. За какое минимальное время (в минутах) Игорь сможет добиться этого?

   Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

   - restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
   - restore two accounts – then a new question from the user will appear;
   - answer one user question – then two new questions will appear;
   - restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

   Initially, there were problems with 15 user accounts, and 10 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. In what minimum amount of time (in minutes) can Igor achieve this?

Answer: 23

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть есть m «сломанных» аккаунтов и n вопросов пользователей – сопоставим паре (m, n) точку с соответствующими координатами на плоскости. Тогда действиям Игоря (и описанным в условии последствиям этих действий) поставим в соответствие векторы:

- вектор $\overrightarrow{a} = (0, 0)$: «восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же)»;
- вектор $\overrightarrow{b} = (-2, 1)$: «восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя»;
- вектор $\overrightarrow{c} = (0, 1)$: «ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса»;
- вектор $\overrightarrow{d} = (0, -1)$: «восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же)».

Т.е. выполнить действие – значит переместиться вдоль соответствующего вектора, при этом не нарушая условия неотрицательности координат его концов (кол-ва аккаунтов и вопросов – целые неотрицательные числа). Цель – попасть в точку $(0, 0)$ – это будет означать, что не осталось проблем с аккаунтами и вопросами пользователей.

Сразу заметим, что действия, соответствующие векторам $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{c}$, не приводят к приближению к $(0,0)$, кроме случаев, когда эти действия выполняются из точек $(1,0)$ и $(0,1)$, соответственно. Иными словами, из этих действий Игорю пригодится не более одного, причем если и пригодится, то только 1 раз – в самую последнюю минуту.

Чтобы переместиться в точку $(0,0)$ действиями, соответствующими векторам $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{d}$, нужно находиться в точках $(2,0)$ и $(1,1)$, соответственно.

Итак, при помощи векторов $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{d}$ необходимо переместиться из точки $(10,15)$ в точку $(2,0)$, либо $(1,1)$, либо $(1,0)$, либо $(0,1)$ за минимальное количество «шагов», после чего потребуется еще один шаг для перемещения в $(0,0)$.

Рассмотрим случай перемещения в $(2,0)$: пусть для этого потребовалось x векторов $\overrightarrow{b}$ и y векторов $\overrightarrow{d}$, т.е. $x \cdot \overrightarrow{b} + y \cdot \overrightarrow{d} = (-8,-15)$, или

$$\begin{cases} -2x + 0y = -8 \\ 1x - 1y = -15 \end{cases},$$

откуда $x = 4$, $y = 19$, т.е. всего Игорю потребуется $4+19+1 = 24$ действия. Аналогичным образом рассмотрев точки $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$, получим, что найденные 24 действия – самый быстрый из возможных способов.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let there be m «broken» accounts and n user questions – match the (m,n) pair to a point with the corresponding coordinates on the plane. Then we will associate Igor's actions (and the consequences of these actions described in the task's formulation) with the following vectors:

- vector $\overrightarrow{a} = (0,0)$: «restore one account, but then another account will break (possibly the restored one)»;
- vector $\overrightarrow{b} = (-2,1)$: «restore two accounts – then a new question from the user will appear»;
- vector $\overrightarrow{c} = (0,1)$: «answer one user question – then two new questions will appear»;
- vector $\overrightarrow{d} = (0,-1)$: «restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break».

To perform an action means to move along the corresponding vector, without violating the condition of non-negativity of the coordinates of its ends (the number of accounts and questions are non-negative integers). The goal is to get to the point $(0,0)$ – by that, there will be no problems left with accounts and user questions.

Note that the actions corresponding to the vectors $\overrightarrow{a}$ and $\overrightarrow{c}$ do not lead to $(0,0)$, except when these actions are performed from points $(1,0)$ and $(0,1)$, respectively. In other words, Igor will need no more than one of these actions, and if he does, it will be only once – at the very last minute.

To move to the point $(0,0)$ by actions corresponding to vectors $\overrightarrow{b}$ and $\overrightarrow{d}$, you need to be at points $(2,0)$ and $(1,1)$, respectively.

So, it is necessary to use the vectors $\overrightarrow{b}$ and $\overrightarrow{d}$ to move from point $(10,15)$ to point $(2,0)$, or $(1,1)$, or $(1,0)$ or $(0,1)$ in a minimum number of «steps», after which it would take another step to move to $(0,0)$.

Consider the case of moving to $(2,0)$: let this require x vectors $\overrightarrow{b}$ and y vectors $\overrightarrow{d}$, i.e. $x \cdot \overrightarrow{b} + y \cdot \overrightarrow{d} = (-8,-15)$, or

$$\begin{cases} -2x + 0y = -8 \\ 1x - 1y = -15 \end{cases},$$

thus $x = 4$, $y = 19$, i.e. Igor will need $4+19+1 = 24$ actions in total. Having similarly considered the points $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$, we find that the 24 actions just found are the fastest possible way to achieve the goal.

Task 2.

1. В остроугольном $\triangle ABC$ высота, опущенная на сторону BC, равна 10. На меньших дугах AB, AC окружности, описанной около $\triangle ABC$, отмечены точки P, Q (соответственно) так, что расстояния от точки A до прямых BP, CQ соответственно равны 4 и 6. Найдите расстояние от точки A до прямой PQ. Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых.

   In an acute-angled $\triangle ABC$ the height to its side BC is equal to 10. On the lesser arcs AB, AC of the $\triangle ABC$ circumcircle, points P, Q are marked respectively such that the distances from point A to lines BP, CQ are equal to 4 and 6, respectively. Calculate the distance from point A to line PQ. Write your answer as an integer or a decimal rounded to the nearest hundredth.

   Answer: 2.4

2. В остроугольном $\triangle ABC$ высота, опущенная на сторону BC, равна 10. На меньших дугах AB, AC окружности, описанной около $\triangle ABC$, отмечены точки P, Q (соответственно) так, что расстояния от точки A до прямых BP, CQ соответственно равны 7 и 5. Найдите расстояние от точки A до прямой PQ. Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых.

   In an acute-angled $\triangle ABC$ the height to its side BC is equal to 10. On the lesser arcs AB, AC of the $\triangle ABC$ circumcircle, points P, Q are marked respectively such that the distances from point A to lines BP, CQ are equal to 7 and 5, respectively. Calculate the distance from point A to line PQ. Write your answer as an integer or a decimal rounded to the nearest hundredth.

   Answer: 3.5

3. В остроугольном $\triangle ABC$ высота, опущенная на сторону BC, равна 8. На меньших дугах AB, AC окружности, описанной около $\triangle ABC$, отмечены точки P, Q (соответственно) так, что расстояния от точки A до прямых BP, CQ соответственно равны 4 и 6. Найдите расстояние от точки A до прямой PQ. Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых.

   In an acute-angled $\triangle ABC$ the height to its side BC is equal to 8. On the lesser arcs AB, AC of the $\triangle ABC$ circumcircle, points P, Q are marked respectively such that the distances from point A to lines BP, CQ are equal to 4 and 6, respectively. Calculate the distance from point A to line PQ. Write your answer as an integer or a decimal rounded to the nearest hundredth.

   Answer: 3

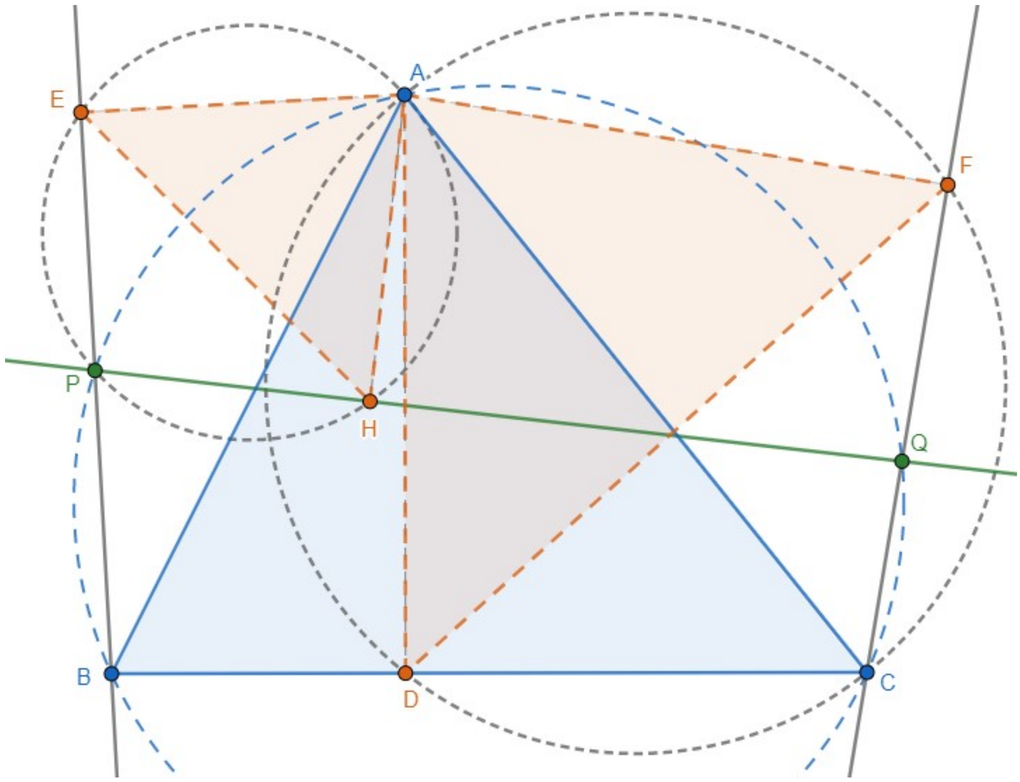
4. В остроугольном $\triangle ABC$ высота, опущенная на сторону BC, равна 6. На меньших дугах AB, AC окружности, описанной около $\triangle ABC$, отмечены точки P, Q (соответственно) так, что расстояния от точки A до прямых BP, CQ соответственно равны 5 и 3. Найдите расстояние от точки A до прямой PQ. Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых.

   In an acute-angled $\triangle ABC$ the height to its side BC is equal to 6. On the lesser arcs AB, AC of the $\triangle ABC$ circumcircle, points P, Q are marked respectively such that the distances from point

A to lines BP, CQ are equal to 5 and 3, respectively. Calculate the distance from point A to line PQ. Write your answer as an integer or a decimal rounded to the nearest hundredth.

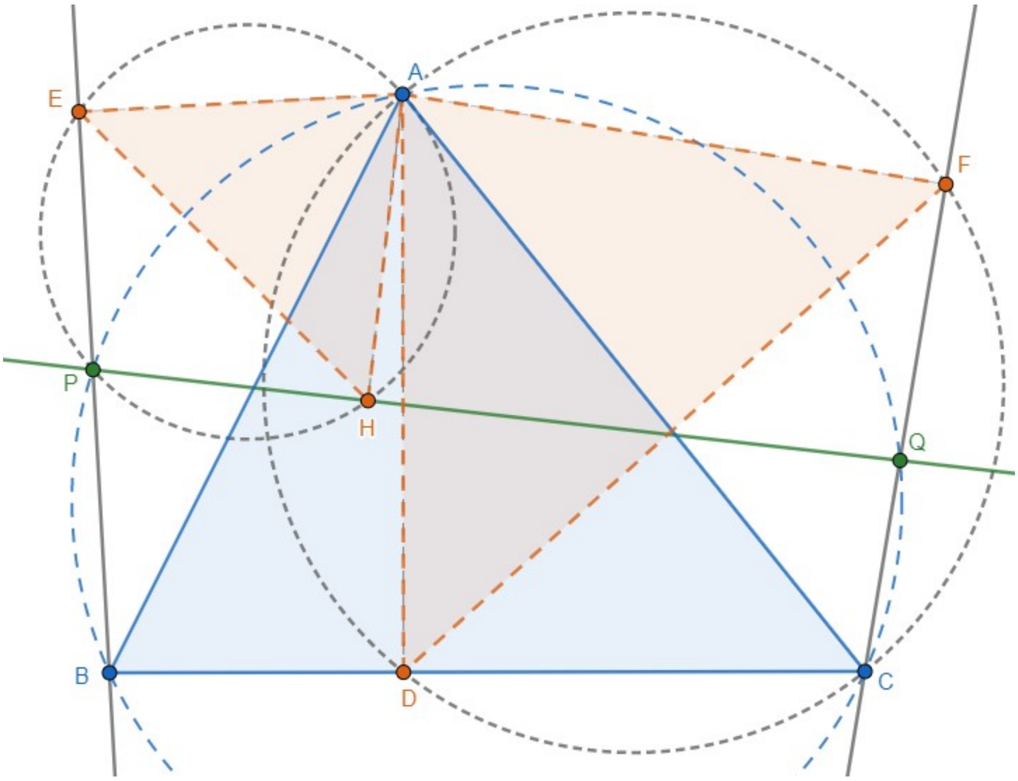
Answer: 2.5

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть D, E, F, H – основания перпендикуляров, проведенных из точки A к прямым BC, BP, CQ, PQ соответственно.
Тогда точки A, H, P, E лежат на одной окружности с диаметром AP, т.к. $\angle AEP = \angle AHP = 90°$; аналогично показываем, что точки A, D, C, F лежат на одной окружности с диаметром AC. Тогда $\angle AEH = \angle APH = \angle ACQ = \angle ADF$; также $\angle EAH = 180° - \angle EPH = \angle BPQ = 180° - \angle DCQ = \angle DAF$.



Следовательно, треугольники AEH и ADF подобны по двум углам, откуда $\frac{AH}{AF} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AH = \frac{AF \cdot AE}{AD} = 2.4$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let D, E, F, H be the bases of the perpendiculars drawn from the point A to the lines BC, BP, CQ, PQ, respectively.
Then the points A, H, P, E lie on the same circle with diameter AP, because $\angle AEP = \angle AHP = 90°$; similarly, the points A, D, C, F lie on the same circle with diameter AC. Then $\angle AEH = \angle APH = \angle ACQ = \angle ADF$; also $\angle EAH = 180° - \angle EPH = \angle BPQ = 180° - \angle DCQ = \angle DAF$.



Therefore, triangles AEH and ADF are similar, whence $\frac{AH}{AF} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AH = \frac{AF \cdot AE}{AD} = 2.4$.

Task 3.

1. Найдите минимальное натуральное k, при котором $k!$ нацело делится на 2^{2024}. По определению $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k$.

   Find the smallest positive integer k such that $k!$ is divisible by 2^{2024}. By definition $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k$.

   Answer: 2032

2. Найдите минимальное натуральное k, при котором $k!$ нацело делится на 2^{2026}. По определению $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k$.

   Find the smallest positive integer k such that $k!$ is divisible by 2^{2026}. By definition $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k$.

   Answer: 2034

3. Найдите минимальное натуральное k, при котором $k!$ нацело делится на 2^{2032}. По определению $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k$.

   Find the smallest positive integer k such that $k!$ is divisible by 2^{2032}. By definition $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k$.

   Answer: 2040

4. Найдите минимальное натуральное k, при котором $k!$ нацело делится на 2^{2021}. По определению $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k$.

   Find the smallest positive integer k such that $k!$ is divisible by 2^{2021}. By definition $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k$.

Answer: 2028

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Сначала докажем, что для любого натурального n число $(2^n)!$ кратно $2^{(2^n-1)}$, но не кратно 2^{2^n}.
В произведении $(2^n)! = 1 \cdot 2 \cdots (2^n - 1) \cdot (2^n)$ есть ровно $2^n/2 = 2^{n-1}$ четных сомножителей (добавляют 1 к степени двойки в разложение $(2^n)!$ на простые множители), $2^n/4 = 2^{n-2}$ сомножителей, кратных 4 (добавляют еще по 1 к степени двойки в разложение $(2^n)!$ на простые множители), 2^{n-3} сомножителей, кратных 8, $\ldots$, $2^{n-n} = 1$ сомножитель, кратный 2^n (еще $+1$ к степени двойки) – итак, число 2 входит в разложение $(2^n)!$ на простые множители в степени $2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^1 + 2^0 = 2^n - 1$, что доказывает требуемое.

В нашей задаче нужно подобрать такое n, что $(2^n - 1)$ ближе всего к 2024. Это 11 и $k = 2^{11} = 2048$; тогда $(2^{11} - 1) = 2047$. Нам нужно найти минимальное k такое, чтобы $k!$ было кратно 2^{2024}. Будем уменьшать k и смотреть, как уменьшается степень двойки в разложении $k!$. Например, $2047!$ имеет на 11 двоек в разложении меньше, чем $2048!$ – нет множителя $2048 = 2^{11}$; $2033!$ имеет на 22 двойки меньше (нет множителей с 2034 по 2048, их произведение кратно 2^{22}) – значит, $2033!$ делится на 2^{2025}. А вот выбросить следующий чётный множитель, 2032, мы не можем – 2032 делится на 8, и $2031!$ будет кратно лишь 2^{2023}. Поэтому минимальное k, при котором $k!$ нацело делится на 2^{2024}, равно 2032.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Lets prove that for any positive integer n the number $(2^n)!$ is a multiple of $2^{(2^n-1)}$, but not a multiple of 2^{2^n}.
The product $(2^n)! = 1 \cdot 2 \cdots (2^n - 1) \cdot (2^n)$ has exactly $2^n/2 = 2^{n-1}$ even factors (adding 1 to the power of 2 in the representation of $(2^n)!$ as a product of primes), $2^n/4 = 2^{n-2}$ factors that are multiples of 4 (add another 1 to the power of 2 in the representation of $(2^n)!$ as a product of primes), 2^{n-3} factors are multiples of 8, $\ldots$, $2^{n-n} = 1$ factor is a multiple of 2^n ($+1$ more to the power of 2) – so, the number 2 is included in the representation of $(2^n)!$ into prime factors in the power of $2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^1 + 2^0 = 2^n - 1$, which proves what is required.

In the task presented, we need to find a number n such that $(2^n - 1)$ is closest to 2024. This is 11 with $k = 2^{11} = 2048$; then $(2^{11} - 1) = 2047$. We need to find a minimum k such that $k!$ is a multiple of 2^{2024}. We will reduce k and see how the number of powers of two in the expansion of $k!$ decreases. For example, $2047!$ has 11 fewer twos in the expansion than $2048!$ – there is no multiplier 2048; $2033!$ has 22 fewer 2s (there are no multipliers 2034 through 2048, their product is a multiple of 2^{22}). So, $2033!$ is divisible by 2^{2025}. But we can't throw away the next even multiplier 2032 since is divisible by 8, and $2031!$ will only be a multiple of 2^{2023}. Therefore, the smallest k such that $k!$ is divisible by 2^{2024} is 2032.

Task 4.

1. Тройка натуральных чисел (x, y, z) удовлетворяет уравнению

$$x^2 + 2023y^2 = z^2$$

   Также известно, что $y > 113$ – простое число, а z – наименьшее при данном y. Чему равно наибольшее возможное значение $\frac{z}{x}$? Запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых.

Triple of positive integers (x, y, z) satisfies the equation

$$x^2 + 2023y^2 = z^2$$

It is also known that $y > 113$ is a prime number, and z is the smallest number for a given y. What is the largest possible value of $\frac{z}{x}$? Write your answer as an integer or a decimal rounded to the nearest hundredth.

Answer: 1.33

2. Тройка натуральных чисел (x, y, z) удовлетворяет уравнению

$$x^2 + 845y^2 = z^2$$

Также известно, что $y > 61$ – простое число, а z – наименьшее при данном y. Чему равно наибольшее возможное значение $\frac{z}{x}$? Запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых.

Triple of positive integers (x, y, z) satisfies the equation

$$x^2 + 845y^2 = z^2$$

It is also known that $y > 61$ is a prime number, and z is the smallest number for a given y. What is the largest possible value of $\frac{z}{x}$? Write your answer as an integer or a decimal rounded to the nearest hundredth.

Answer: 1.5

3. Тройка натуральных чисел (x, y, z) удовлетворяет уравнению

$$x^2 + 3179y^2 = z^2$$

Также известно, что $y > 181$ – простое число, а z – наименьшее при данном y. Чему равно наибольшее возможное значение $\frac{z}{x}$? Запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых.

Triple of positive integers (x, y, z) satisfies the equation

$$x^2 + 3179y^2 = z^2$$

It is also known that $y > 181$ is a prime number, and z is the smallest number for a given y. What is the largest possible value of $\frac{z}{x}$? Write your answer as an integer or a decimal rounded to the nearest hundredth.

Answer: 1.2

4. Тройка натуральных чисел (x, y, z) удовлетворяет уравнению

$$x^2 + 1859y^2 = z^2$$

Также известно, что $y > 139$ – простое число, а z – наименьшее при данном y. Чему равно наибольшее возможное значение $\frac{z}{x}$? Запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых.

Triple of positive integers (x, y, z) satisfies the equation

$$x^2 + 1859y^2 = z^2$$

It is also known that $y > 139$ is a prime number, and z is the smallest number for a given y. What is the largest possible value of $\frac{z}{x}$? Write your answer as an integer or a decimal rounded to the nearest hundredth.

Answer: 1.2

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Так как $z^2 > x^2$, пусть $z = x + k$, где k – натуральное число:

$$x^2 + 2023y^2 = (x+k)^2$$

$$x^2 + 2023y^2 = x^2 + 2kx + k^2$$

$$2kx = 2023y^2 - k^2$$

$$x = \frac{2023y^2 - k^2}{2k}, \tag{1}$$

откуда

$$z = \frac{2023y^2 + k^2}{2k} \tag{2}$$

Из равенства (1) и того, что x – натуральное, делаем следующие выводы:

$$k < 45y \tag{3}$$

$$\left(2023y^2 - k^2\right) \vdots\ 2 \tag{4}$$

$$\left(2023y^2 - k^2\right) \vdots\ k \tag{5}$$

Если выбранное значение k удовлетворяет (3)-(5), то оно дает нам решение исходного уравнения.

Теперь покажем, что при увеличении значения k значение z уменьшается для любого y. Подставим в выражение (2) значения k и $k+1$ и получим следующее неравенство:

$$\frac{2023y^2 + (k+1)^2}{2(k+1)} \ \vee\ \frac{2023y^2 + k^2}{2k}$$

(здесь вместо $\vee$ должен стоять знак неравенства), которое сводится к:

$$k \ \vee\ 4046y^2 - 1$$

Соединяя с неравенством (3), получаем:

$$0 \ \vee\ 4046y^2 - 45y - 1$$

Для любого натурального y вместо $\vee$ здесь должен стоять знак $<$, что и требовалось доказать. Таким образом, вопрос задачи сводится к нахождению наибольшего значения k, удовлетворяющего критериям (3)-(5).

$2023 = 7 \cdot 17^2$. Значения $k = 7 \cdot 17y, 17^2y,\ 7 \cdot 17^2y,\ 17y^2,\ 7 \cdot 17y^2, 17^2y^2,\ 7 \cdot 17^2y^2$ не подходят под критерий (3). Также под него не подходит $k = y^2$, т.к. $y^2 > 45y$ $(y > 113 > 45)$. Под перечисленные критерии подходят только $1, 7, 17, 7 \cdot 17 = 119, 17^2 = 289, y, 7y, 17y$. Если сравнить их между собой, то получится, что $17y > 2023$ (т.к. $y > 119$). Значит, $k = 17y$ является наибольшим из подходящих, и

$$\max \frac{z}{x} = \frac{2023y^2 + 289y^2}{2023y^2 - 289y^2} = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Since $z^2 > x^2$, let $z = x + k$ for some is a positive integer k:

$$x^2 + 2023y^2 = (x+k)^2$$

$$x^2 + 2023y^2 = x^2 + 2kx + k^2$$

$$2kx = 2023y^2 - k^2$$

$$x = \frac{2023y^2 - k^2}{2k}, \tag{1}$$

thus

$$z = \frac{2023y^2 + k^2}{2k} \tag{2}$$

From (1) and the fact $x \in \mathbb{N}$ we get

$$k < 45y \tag{3}$$

$$\left(2023y^2 - k^2\right) \vdots\ 2 \tag{4}$$

$$\left(2023y^2 - k^2\right) \vdots\ k \tag{5}$$

If some k satisfies (3)-(5), then it gives us a solution to the initial equation.

Lets show that as the value of k increases, the value of z decreases for any y. We substitute the values k and $k+1$ into expression (2) and obtain the following inequality:

$$\frac{2023y^2 + (k+1)^2}{2(k+1)} \vee \frac{2023y^2 + k^2}{2k}$$

(there should be an inequality sign instead of $\vee$), which simplifies to:

$$k \ \vee\ 4046y^2 - 1$$

Combining with inequality (3), we get:

$$0 \ \vee\ 4046y^2 - 45y - 1$$

For any positive integer y, instead of $\vee$ there must be a sign $<$, which is what we needed to prove. Thus, the task is reduced to finding the largest value of k that satisfies criteria (3)-(5).

$2023 = 7 \cdot 17^2$. The values $k = 7 \cdot 17y, 17^2y,\ 7 \cdot 17^2y,\ 17y^2,\ 7 \cdot 17y^2, 17^2y^2,\ 7 \cdot 17^2y^2$ do not meet the criteria (3). Also, $k = y^2$ does not fit it since $y^2 > 45y$ $(y > 113 > 45)$. Only $1, 7, 17, 7 \cdot 17 = 119, 17^2 = 289, y, 7y, 17y$ fit the criteria. If we compare them with each other, it turns out that $17y > 2023$ (since $y > 119$). By that, $k = 17y$ is the largest suitable one, and

$$\max \frac{z}{x} = \frac{2023y^2 + 289y^2}{2023y^2 - 289y^2} = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

Task 5.

1. Анна утверждает, что можно записать число, кратное 2023^{2024}, не используя цифры «0» и последовательностей цифр «13» и «666», а суеверный Тимур говорит, что это невозможно. Кто из них прав? Обоснуйте свой ответ с помощью математики, а не суеверий.

   Anna claims that it is possible to write a number that is a multiple of 2023^{2024} without using the digit «0» and the sequences of digits «13» and «666», but superstitious Timur says that it's impossible. Who is right? Explain your answer using mathematics, not superstition.

2. Анна утверждает, что можно записать число, кратное 2023^{2023}, не используя цифры «0» и последовательностей цифр «13» и «666», а суеверный Тимур говорит, что это невозможно. Кто из них прав? Обоснуйте свой ответ с помощью математики, а не суеверий.

   Anna claims that it is possible to write a number that is a multiple of 2023^{2023} without using the digit «0» and the sequences of digits «13» and «666», but superstitious Timur says that it's impossible. Who is right? Explain your answer using mathematics, not superstition.

3. Анна утверждает, что можно записать число, кратное $2023^{2023^{2023}}$, не используя цифры «0» и последовательностей цифр «13» и «666», а суеверный Тимур говорит, что это невозможно. Кто из них прав? Обоснуйте свой ответ с помощью математики, а не суеверий.

   Anna claims that it is possible to write a number that is a multiple of $2023^{2023^{2023}}$ without using the digit «0» and the sequences of digits «13» and «666», but superstitious Timur says that it's impossible. Who is right? Explain your answer using mathematics, not superstition.

4. Анна утверждает, что можно записать число, кратное $2023^{2024^{2023}}$, не используя цифры «0» и последовательностей цифр «13» и «666», а суеверный Тимур говорит, что это невозможно. Кто из них прав? Обоснуйте свой ответ с помощью математики, а не суеверий.

   Anna claims that it is possible to write a number that is a multiple of $2023^{2024^{2023}}$ without using the digit «0» and the sequences of digits «13» and «666», but superstitious Timur says that it's impossible. Who is right? Explain your answer using mathematics, not superstition.

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Докажем, что требуемое число можно записать при помощи только цифры «1» – а значит, Анна права.

Итак, пусть a_n – натуральное число, десятичная запись которого состоит из n «единиц», т.е. $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 111$, $\ldots$. Пусть r_n – остатки от деления a_n на 2023^{2024} при всевозможных натуральных n. Если среди $r_1, r_2, \ldots, r_{2023^{2024}}$ есть $r_k = 0$, то соответствующее a_k кратно 2023^{2024}, что доказывает правоту Анны.
Если же среди $r_1, r_2, \ldots, r_{2023^{2024}}$ нет «0», то, согласно принципу Дирихле, найдутся $r_i = r_j$ ($i \neq j$; не ограничивая общности, будем считать $i < j$). Тогда $a_j - a_i = a_{j-i} \cdot 10^i$ кратно 2023^{2024}, при этом 10 взаимно просто с 2023 – а значит, a_{j-i} кратно 2023^{2024}, что доказывает правоту Анны.

Критерии оценивания:

- присутствует идея использовать в записи числа только одну цифру – 1 балл;
- при рассмотрении остатков использован принцип Дирихле – 2 балла;
- при рассмотрении остатков использован принцип Дирихле, доказано, что остаток при делении a_n на нужное число может быть равен 0 – 3 балла;
- верный ответ при незначительных ошибках в решении – 4 балла;
- полностью верные решение и ответ – 5 баллов.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let's prove that the required number can be written using only the digit «1», which means Anna is right.

First, let a_n be a positive integer which decimal notation consists of n digits «1», i.e. $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 111$, $\ldots$. Let r_n be the remainders from dividing a_n by 2023^{2024} for all possible integers n. If among

$r_1, r_2, \ldots, r_{2023^{2024}}$ there is $r_k = 0$, then the corresponding a_k is a multiple of 2023^{2024}, which proves Anna is right.
If among $r_1, r_2, \ldots, r_{2023^{2024}}$ there is no «0», then, according to the Dirichlet's principle, there exist $r_i = r_j$ ($i \neq j$; without loss of generality, we assume $i < j$). Then $a_j - a_i = a_{j-i} \cdot 10^i$ is a multiple of 2023^{2024}, while 10 is coprime with 2023 – thus, a_{j-i} is a multiple of 2023^{2024}, which proves Anna is right.

Criteria:

- there is an idea to use only one digit to write the required number – 1 point;
- when considering remainders, the Dirichlet principle was used – 2 points;
- when considering remainders, the Dirichlet principle was used, also it was proven that the remainder when dividing a_n by the required number can be equal to 0 – 3 points;
- correct answer with minor errors in the solution – 4 points;
- completely correct solution and answer – 5 points.

Task 6.

1. Из бóльшего правильного 8-угольника вырезали меньший правильный 6-угольник. Опишите, как при помощи только математической линейки провести прямую так, чтобы она разделила оставшуюся фигуру на две равновеликие (т.е. равные по площади) фигуры. Помните, что математическая линейка позволяет проводить прямые через две отмеченные точки, а также отмечать пересечения прямых (отрезков, лучей), но не позволяет измерять длины отрезков.

   From the larger regular 8-gon a smaller regular 6-gon was cut out. Describe how to use a mathematical ruler to draw a straight line that divides the remaining figure into two figures with equal areas. Remember that a mathematical ruler allows you to draw straight lines through two marked points, as well as mark the intersections of straight lines (segments, rays), but does not allow you to measure the lengths of segments.

2. Из бóльшего правильного 6-угольника вырезали меньший правильный 10-угольник. Опишите, как при помощи только математической линейки провести прямую так, чтобы она разделила оставшуюся фигуру на две равновеликие (т.е. равные по площади) фигуры. Помните, что математическая линейка позволяет проводить прямые через две отмеченные точки, а также отмечать пересечения прямых (отрезков, лучей), но не позволяет измерять длины отрезков.

   From the larger regular 6-gon a smaller regular 10-gon was cut out. Describe how to use a mathematical ruler to draw a straight line that divides the remaining figure into two figures with equal areas. Remember that a mathematical ruler allows you to draw straight lines through two marked points, as well as mark the intersections of straight lines (segments, rays), but does not allow you to measure the lengths of segments.

3. Из бóльшего правильного 8-угольника вырезали меньший правильный 10-угольник. Опишите, как при помощи только математической линейки провести прямую так, чтобы она разделила оставшуюся фигуру на две равновеликие (т.е. равные по площади) фигуры. Помните, что математическая линейка позволяет проводить прямые через две отмеченные точки, а также отмечать пересечения прямых (отрезков, лучей), но не позволяет измерять длины отрезков.

From the larger regular 8-gon a smaller regular 10-gon was cut out. Describe how to use a mathematical ruler to draw a straight line that divides the remaining figure into two figures with equal areas. Remember that a mathematical ruler allows you to draw straight lines through two marked points, as well as mark the intersections of straight lines (segments, rays), but does not allow you to measure the lengths of segments.

4. Из бóльшего правильного 10-угольника вырезали меньший правильный 6-угольник. Опишите, как при помощи только математической линейки провести прямую так, чтобы она разделила оставшуюся фигуру на две равновеликие (т.е. равные по площади) фигуры. Помните, что математическая линейка позволяет проводить прямые через две отмеченные точки, а также отмечать пересечения прямых (отрезков, лучей), но не позволяет измерять длины отрезков.

   From the larger regular 10-gon a smaller regular 6-gon was cut out. Describe how to use a mathematical ruler to draw a straight line that divides the remaining figure into two figures with equal areas. Remember that a mathematical ruler allows you to draw straight lines through two marked points, as well as mark the intersections of straight lines (segments, rays), but does not allow you to measure the lengths of segments.

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Здесь и далее будем называть центром правильного $2n$-угольника центр описанной около него окружности – он располагается на пересечении наибольших диагоналей $2n$-угольника. Заметим, что произвольная прямая l, проходящая через центр правильного $2n$-угольника, делит его на два равных (а значит, и равновеликих) многоугольника: они совмещаются поворотом вокруг центра исходного $2n$-угольника на $180°$.

Пусть A – центр исходного (бóльшего) 8-угольника, а B – центр меньшего 6-угольника. Тогда прямая AB делит каждый из них на два равновеликих многоугольника, т.е. по каждую сторону AB лежит половина площади каждого из двух упомянутых многоугольников – а значит, эта прямая удовлетворяет условиям задачи.

Чтобы провести такую прямую, найдем точки A, B: для этого проведем по две наибольшие диагонали исходных 8-угольника и 6-угольника. Теперь остается только отметить точки A, B пересечения упомянутых диагоналей, и затем провести прямую AB.

Критерии оценивания:

- описана требуемая прямая, но не представлен алгоритм ее построения – 1 балл;
- представлен алгоритм построения без доказательства – 3 балла;
- представлен алгоритм построения с доказательством – 5 баллов.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Here and later we will call the center of a regular $2n$-gon the center of its circumcircle – it is located at the intersection of the largest diagonals of the $2n$-gon. Note that an arbitrary line l passing through the center of a regular $2n$-gon divides it into two equal (and therefore having equal areas) polygons: they coincide after rotating around the center of the original $2n$-gon by $180°$.

Let A be the center of the original (larger) octagon, and B the center of the smaller 6-gon. Then the line AB divides each of them into two equal polygons, i.e. by each side from AB lies half the area of each of the two polygons, which means that the line satisfies the task's conditions.

To draw such a line, we find points A, B: to do that, we draw the two largest diagonals of the original octagon and hexagon. Now all that remains is to mark the intersection points A, B of the diagonals, and then draw the line AB.

Criteria:

- the required line is described, but the algorithm for its construction is not presented – 1 point;
- the construction algorithm is presented without proof – 3 points;
- the construction algorithm with proof is presented – 5 points.