# $7^{th}$ degree

**Task 1.**

1. В январе некоторого года четвергов больше, чем вторников, а суббот меньше, чем пятниц. На какое число приходится последний понедельник этого января?

   In some year, January has more Thursdays than Tuesdays, and less Saturdays than Fridays. What number in the January has its last Monday?

   **Answer:** 27

2. В январе некоторого года четвергов больше, чем вторников, а суббот меньше, чем пятниц. На какое число приходится третий четверг этого января?

   In some year, January has more Thursdays than Tuesdays, and less Saturdays than Fridays. What number in the January has its third Thursday?

   **Answer:** 16

3. В январе некоторого года четвергов больше, чем вторников, а суббот меньше, чем пятниц. На какое число приходится четвертая среда этого января?

   In some year, January has more Thursdays than Tuesdays, and less Saturdays than Fridays. What number in the January has its fourth Wednesday?

   **Answer:** 22

4. В январе некоторого года четвергов больше, чем вторников, а суббот меньше, чем пятниц. На какое число приходится первый вторник этого января?

   In some year, January has more Thursdays than Tuesdays, and less Saturdays than Fridays. What number in the January has its first Tuesday?

   **Answer:** 7

**Solution (RUS).** *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* В каждом январе 31 день, что составляет 4 полные недели и еще 3 дня – значит, никакой день недели не встретится меньше 4 раз и больше 5 раз. Из условия следует, что в указанном январе было 4 вторника, 4 субботы, 5 четвергов и 5 пятниц.

Если январь начинается с воскресенья, понедельника или вторника, то в нем 5 вторников (противоречит условию). Если январь начинается с четверга, пятницы или субботы, то в нем 5 суббот (тоже противоречит условию). Таким образом, для соблюдения условий январь должен начинаться со среды, а значит, заканчиваться пятницей 31-го, т.е. последний понедельник приходится на 27 января.

**Solution (ENG).** *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Each January has 31 days, which is 4 full weeks and 3 more days, which means that no day of a week occurs less than 4 times or more than 5 times. From the condition it follows that in the given January there are 4 Tuesdays, 4 Saturdays, 5 Thursdays and 5 Fridays.

If January begins on a Sunday, Monday or Tuesday, then it has 5 Tuesdays (which contradicts the condition). If January begins on Thursday, Friday or Saturday, then it has 5 Saturdays (also contrary to the condition). Thus, in order to comply with the conditions, January must begin with Wednesday, which means it must end on Friday the 31st, i.e. the last Monday appears on January 27th.

**Task 2.**

1. В классе учатся 6 девочек и 9 мальчиков. Было решено создать из учеников этого класса наибольшее количество школьных чатов в учебном профиле «Сферум», в каждом из которых будет хотя бы одна девочка. Сколько чатов будет создано?

   There are 6 girls and 9 boys in the class. It was decided to create the largest number of school chats in the «Spherum» educational profile from the students of this class, with each of the chats having at least one girl. How many chats will be created?

   **Answer:** 32256

2. В классе учатся 7 девочек и 10 мальчиков. Было решено создать из учеников этого класса наибольшее количество школьных чатов в учебном профиле «Сферум», в каждом из которых будет хотя бы одна девочка. Сколько чатов будет создано?

   There are 7 girls and 10 boys in the class. It was decided to create the largest number of school chats in the «Spherum» educational profile from the students of this class, with each of the chats having at least one girl. How many chats will be created?

   **Answer:** 130048

3. В классе учатся 6 девочек и 7 мальчиков. Было решено создать из учеников этого класса наибольшее количество школьных чатов в учебном профиле «Сферум», в каждом из которых будет хотя бы одна девочка. Сколько чатов будет создано?

   There are 6 girls and 7 boys in the class. It was decided to create the largest number of school chats in the «Spherum» educational profile from the students of this class, with each of the chats having at least one girl. How many chats will be created?

   **Answer:** 8064

4. В классе учатся 6 девочек и 10 мальчиков. Было решено создать из учеников этого класса наибольшее количество школьных чатов в учебном профиле «Сферум», в каждом из которых будет хотя бы одна девочка. Сколько чатов будет создано?

   There are 6 girls and 10 boys in the class. It was decided to create the largest number of school chats in the «Spherum» educational profile from the students of this class, with each of the chats having at least one girl. How many chats will be created?

   **Answer:** 64512

**Solution (RUS).** *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Есть ровно $2^n$ способов выбрать подмножество из множества с $n$ элементами – значит, всего из учеников этого класса можно составить $2^{15} = 32768$ чатов. Составить чат без девочек можно $2^9 = 512$ способами, т.к. в классе 9 мальчиков. Значит, остальных чатов, в которых будет хотя бы по одной девочке, будет $32768 - 512 = 32256$.

**Solution (ENG).** *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* There are $2^n$ ways to select a subset from a set with $n$ elements, thus there can be $2^{15} = 32768$ chats created from the students in the class. Also there can be $2^9 = 512$ chats without girls since there are 9 boys in the class. By that, the rest of the chats will have at least one girl, and there will be $32768 - 512 = 32256$ such chats.

**Task 3.**

1. На острове живут два племени – рыцари (всегда говорят правду) и лжецы (всегда лгут). Однажды 2023 островитянина сели за круглый стол, и каждый из них сказал: «среди двух моих соседей есть мой соплеменник». Потом пришел еще один лжец и сел за стол. При каком наибольшем количестве рыцарей можно гарантировать, что не все смогут повторить утверждение «среди двух моих соседей есть мой соплеменник»?

   Two tribes live on the island: knights (who always tell the truth) and liars (who always lie). One day, 2023 islanders sat down at a round table, and each of them said: «among my two neighbors there is my fellow tribesman». Then another liar came and sat down at the table. What is the largest number of knights that can guarantee that not everyone will be able to repeat the statement «among my two neighbors there is my fellow tribesman»?

   **Answer:** 1517

2. На острове живут два племени – рыцари (всегда говорят правду) и лжецы (всегда лгут). Однажды 9999 островитян сели за круглый стол, и каждый из них сказал: «среди двух моих соседей есть мой соплеменник». Потом пришел еще один лжец и сел за стол. При каком наибольшем количестве рыцарей можно гарантировать, что не все смогут повторить утверждение «среди двух моих соседей есть мой соплеменник»?

   Two tribes live on the island: knights (who always tell the truth) and liars (who always lie). One day, 9999 islanders sat down at a round table, and each of them said: «among my two neighbors there is my fellow tribesman». Then another liar came and sat down at the table. What is the largest number of knights that can guarantee that not everyone will be able to repeat the statement «among my two neighbors there is my fellow tribesman»?

   **Answer:** 7499

3. На острове живут два племени – рыцари (всегда говорят правду) и лжецы (всегда лгут). Однажды 5432 островитянина сели за круглый стол, и каждый из них сказал: «среди двух моих соседей есть мой соплеменник». Потом пришел еще один лжец и сел за стол. При каком наибольшем количестве рыцарей можно гарантировать, что не все смогут повторить утверждение «среди двух моих соседей есть мой соплеменник»?

   Two tribes live on the island: knights (who always tell the truth) and liars (who always lie). One day, 5432 islanders sat down at a round table, and each of them said: «among my two neighbors there is my fellow tribesman». Then another liar came and sat down at the table. What is the largest number of knights that can guarantee that not everyone will be able to repeat the statement «among my two neighbors there is my fellow tribesman»?

   **Answer:** 4074

4. На острове живут два племени – рыцари (всегда говорят правду) и лжецы (всегда лгут). Однажды 6002 островитянина сели за круглый стол, и каждый из них сказал: «среди двух моих соседей есть мой соплеменник». Потом пришел еще один лжец и сел за стол. При каком наибольшем количестве рыцарей можно гарантировать, что не все смогут повторить утверждение «среди двух моих соседей есть мой соплеменник»?

   Two tribes live on the island: knights (who always tell the truth) and liars (who always lie). One day, 6002 islanders sat down at a round table, and each of them said: «among my two neighbors there is my fellow tribesman». Then another liar came and sat down at the table. What is the largest number of knights that can guarantee that not everyone will be able to repeat the statement «among my two neighbors there is my fellow tribesman»?

   **Answer:** 4501

**Solution (RUS).** *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Ясно, что два лжеца не могут сидеть рядом, а с каждым рыцарем сидит хотя бы один рыцарь – значит, все сидящие за столом разбиты на группы рыцарей, между которыми сидят по одному лжецу. Заметим, что если в какой-то из таких групп есть хотя бы 4 рыцаря, то в эту группу может «вклиниться» опоздавший лжец: он садится так, чтобы с каждой стороны от него сидели хотя бы два рыцаря. Итак, в каждой упомянутой группе либо 2, либо 3 рыцаря.
Пусть есть $m$ групп с тремя рыцарями и $n$ групп с двумя рыцарями. Тогда $4m + 3n = 2023$ (каждой группе соответствует ровно один лжец), а общее число рыцарей равно $3m + 2n$. Далее $n = (2023 - 4m)/3$, откуда

$$3m + 2n = 3m + 2 \cdot (2023 - 4m)/3 = 3m + 2 \cdot (2022/3 - m - (m-1)/3) = m + 1348 - 2 \cdot \frac{m-1}{3},$$

откуда $m = 3k + 1$ для некоторого целого $k$ (иначе общее число рыцарей не будет целым числом). Получим, что общее число рыцарей за столом равно $3k + 1349 - 2k = k + 1349$, причем $4m = 4(3k+1) \leq 2023$, откуда $k \leq 2019/12 = 168.25$, т.е. наибольшее целое $k = 168$. Итак, наибольшее возможное число рыцарей равно $168 + 1349 = 1517$.

**Solution (ENG).** *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* It is clear that two liars cannot sit next to each other, and at least one knight sits next to a knight, which means that everyone sitting at the table is divided into groups of knights with one liar sitting between the groups. Note that if in any of these groups there are at least 4 knights, then a new liar can «fit» into this group: he sits down in such way that at least two knights sit on each side of him. So, in each group there are either 2 or 3 knights.
Let there be $m$ groups with three knights and $n$ groups with two knights. Then $4m + 3n = 2023$ (each group corresponds to exactly one liar), and the total number of knights is $3m + 2n$. We have $n = (2023 - 4m)/3$, thus

$$3m + 2n = 3m + 2 \cdot (2023 - 4m)/3 = 3m + 2 \cdot (2022/3 - m - (m-1)/3) = m + 1348 - 2 \cdot \frac{m-1}{3},$$

thus $m = 3k+1$ for some integer $k$ (otherwise the total number of knights will not be an integer). We get the total number of knights at the table as $3k+1349-2k = k+1349$, with $4m = 4(3k+1) \leq 2023$, thus $k \leq 2019/12 = 168.25$, i.e. the largest possible value of $k$ is 168. Finally, the largest possible number of knights is $168 + 1349 = 1517$.

**Task 4.**

1. Натуральное число $a$, в десятичной записи оканчивающееся на цифру $d$, удовлетворяет равенству

$$\frac{a}{891} = 0.d4d4d4d4\ldots = 0.(d4)$$

– периодическая десятичная дробь. Найдите $a$.

Positive integer $a$ ends with decimal digit $d$ and satisfies

$$\frac{a}{891} = 0.d4d4d4d4\ldots = 0.(d4)$$

– periodical decimal fraction. Find $a$.

**Answer:** 576

2. Натуральное число $a$, кратное цифре $d$ $(2 \leq d \leq 9)$, удовлетворяет равенству

$$\frac{a}{495} = 0.0d6d6d6d6\ldots = 0.0(d6)$$

– периодическая десятичная дробь. Найдите $a$.

Positive integer $a$ is divisible by the decimal digit $d$ $(2 \leq d \leq 9)$ and satisfies

$$\frac{a}{495} = 0.0d6d6d6d6\ldots = 0.0(d6)$$

– periodical decimal fraction. Find $a$.

**Answer:** 18

3. Натуральное число $a$, в десятичной записи оканчивающееся на цифру $d > 0$, удовлетворяет равенству

$$\frac{a}{693} = 0.3d3d3d3d\ldots = 0.(3d)$$

– периодическая десятичная дробь. Найдите $a$.

Positive integer $a$ ends with decimal digit $d > 0$ and satisfies

$$\frac{a}{693} = 0.3d3d3d3d\ldots = 0.(3d)$$

– periodical decimal fraction. Find $a$.

**Answer:** 245

4. Натуральное число $a$, в десятичной записи оканчивающееся на цифру $d$, удовлетворяет равенству

$$\frac{a}{396} = 0.d3d3d3d3\ldots = 0.(d3)$$

– периодическая десятичная дробь. Найдите $a$.

Positive integer $a$ ends with decimal digit $d$ and satisfies

$$\frac{a}{396} = 0.d3d3d3d3\ldots = 0.(d3)$$

– periodical decimal fraction. Find $a$.

**Answer:** 92

**Solution (RUS).** *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть $x = 0.(d4)$, тогда $100x = \overline{d4.(d4)}$ и $100x - x = 99x = \overline{d4}$, откуда $x = \overline{d4}/99 = \frac{10d+4}{99}$. Первоначальное равенство можно представить в виде $\frac{a}{891} = \frac{10d+4}{99} \Rightarrow a = 90 \cdot d + 36$. Очевидно, число $a$ при любом $d$ оканчивается на 6, откуда $d = 6$ и $a = 576$.

**Solution (ENG).** *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let $x = 0.(d4)$, then $100x = \overline{d4.(d4)}$ and $100x - x = 99x = \overline{d4}$, thus $x = \overline{d4}/99 = \frac{10d+4}{99}$. The initial equality can be represented as $\frac{a}{891} = \frac{10d+4}{99} \Rightarrow a = 90 \cdot d + 36$. Obviously, the number $a$ ends with 6 for any $d$, thus $d = 6$ and $a = 576$.

**Task 5.**

1. Анна придумала новую шахматную фигуру – пегас (крылатый конь): он может ходить на 10 клеток в одном направлении (по горизонтали или вертикали), а затем на 8 клеток в перпендикулярном направлении. Можно ли покрасить некоторые клетки бесконечной белой доски в черный цвет так, чтобы каждым своим ходом пегас попадал в клетку противоположного цвета?

   Anna came up with a new chess piece – pegasus (winged horse): it can move 10 squares in one direction (horizontally or vertically), and then 8 squares in a perpendicular direction. Is it possible to paint in black some squares of an infinite white board so that each move the pegasus switches its cell's color?

2. Анна придумала новую шахматную фигуру – пегас (крылатый конь): он может ходить на 10 клеток в одном направлении (по горизонтали или вертикали), а затем на 4 клетки в перпендикулярном направлении. Можно ли покрасить некоторые клетки бесконечной белой доски в черный цвет так, чтобы каждым своим ходом пегас попадал в клетку противоположного цвета?

   Anna came up with a new chess piece – pegasus (winged horse): it can move 10 squares in one direction (horizontally or vertically), and then 4 squares in a perpendicular direction. Is it possible to paint in black some squares of an infinite white board so that each move the pegasus switches its cell's color?

3. Анна придумала новую шахматную фигуру – пегас (крылатый конь): он может ходить на 8 клеток в одном направлении (по горизонтали или вертикали), а затем на 6 клеток в перпендикулярном направлении. Можно ли покрасить некоторые клетки бесконечной белой доски в черный цвет так, чтобы каждым своим ходом пегас попадал в клетку противоположного цвета?

   Anna came up with a new chess piece – pegasus (winged horse): it can move 8 squares in one direction (horizontally or vertically), and then 6 squares in a perpendicular direction. Is it possible to paint in black some squares of an infinite white board so that each move the pegasus switches its cell's color?

4. Анна придумала новую шахматную фигуру – пегас (крылатый конь): он может ходить на 6 клеток в одном направлении (по горизонтали или вертикали), а затем на 4 клетки в перпендикулярном направлении. Можно ли покрасить некоторые клетки бесконечной белой доски в черный цвет так, чтобы каждым своим ходом пегас попадал в клетку противоположного цвета?

   Anna came up with a new chess piece – pegasus (winged horse): it can move 6 squares in one direction (horizontally or vertically), and then 4 squares in a perpendicular direction. Is it possible to paint in black some squares of an infinite white board so that each move the pegasus switches its cell's color?

**Solution (RUS).** *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Разобьем доску на квадраты $2 \times 2$ и раскрасим эти квадраты в шахматном порядке. Тогда после перемещения на 10 клеток по горизонтали или вертикали цвет клетки пегаса изменится, а после последующего перемещения на 8 клеток в перпендикулярном направлении цвет клетки уже не поменяется.

**Критерии оценивания:**

- приведен пример подходящей раскраски – 2 балла;
- доказано, что приведенный пример удовлетворяет условию – 3 балла.

**Solution (ENG).** *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let's divide the board into $2 \times 2$ squares and color these squares in a chessboard pattern. Then, after pegasus moves 10 steps horizontally or vertically, the color of its cell will change, but after a subsequent move of 8 cells in a perpendicular direction, the color of the cell will not change.

**Criteria:**

- an example of a suitable coloring is given – 2 points;
- it is proved that the given example satisfies the task's condition – 3 points.

**Task 6.**

1. На плоскости дан 20-угольник. Петя прошел вдоль его сторон, рядом с каждой из них записав дробь, в числителе которой – длина этой стороны, а в знаменателе – сумма длин остальных сторон 20-угольника. Докажите, что сумма всех записанных дробей меньше 2.

   A 20-gon is given on the plane. Peter walked along its sides, writing down a fraction next to each of them: the numerator of a fraction is the length of the side, and the denominator is the sum of lengths of the remaining sides of the 20-gon. Prove that the sum of all the written fractions is less than 2.

2. На плоскости дан 15-угольник. Петя прошел вдоль его сторон, рядом с каждой из них записав дробь, в числителе которой – длина этой стороны, а в знаменателе – сумма длин остальных сторон 15-угольника. Докажите, что сумма всех записанных дробей меньше 2.

   A 15-gon is given on the plane. Peter walked along its sides, writing down a fraction next to each of them: the numerator of a fraction is the length of the side, and the denominator is the sum of lengths of the remaining sides of the 15-gon. Prove that the sum of all the written fractions is less than 2.

3. На плоскости дан 2023-угольник. Петя прошел вдоль его сторон, рядом с каждой из них записав дробь, в числителе которой – длина этой стороны, а в знаменателе – сумма длин остальных сторон 2023-угольника. Докажите, что сумма всех записанных дробей меньше 2.

   A 2023-gon is given on the plane. Peter walked along its sides, writing down a fraction next to each of them: the numerator of a fraction is the length of the side, and the denominator is the sum of lengths of the remaining sides of the 2023-gon. Prove that the sum of all the written fractions is less than 2.

4. На плоскости дан 100-угольник. Петя прошел вдоль его сторон, рядом с каждой из них записав дробь, в числителе которой – длина этой стороны, а в знаменателе – сумма длин остальных сторон 100-угольника. Докажите, что сумма всех записанных дробей меньше 2.

   A 100-gon is given on the plane. Peter walked along its sides, writing down a fraction next to each of them: the numerator of a fraction is the length of the side, and the denominator is the sum of lengths of the remaining sides of the 100-gon. Prove that the sum of all the written fractions is less than 2.

**Solution (RUS).** *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ – длины сторон 20-угольника, тогда $P = a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$ – его периметр. Заметим, что каждая сторона многоугольника меньше суммы остальных – значит, сумма остальных больше полупериметра: $P - a_i > P/2$ для любой стороны $a_i$. Рассмотрим сумму дробей, записанных Петей:

$$\frac{a_1}{P-a_1} + \frac{a_2}{P-a_2} + \cdots + \frac{a_{20}}{P-a_{20}} < \frac{a_1}{P/2} + \frac{a_2}{P/2} + \cdots + \frac{a_{20}}{P/2} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}}{P/2} = 2,$$

что и требовалось доказать.

**Критерии оценивания:**

- отмечено, что длина стороны многоугольника меньше суммы длин остальных его сторон – 2 балла;
- помимо указанного в предыдущем пункте, отмечено, что $P - a_i > P/2$ – 1 балл;
- приведены прочие рассуждения, вместе с предыдущими пунктами составляющие решение задачи – 2 балла.

**Solution (ENG).** *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ be the lengths of the sides of the 20-gon, then $P = a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$ is its perimeter. Note that each side of the polygon is less than the sum of the others, which means that the sum of the others is greater than the half of the perimeter: $P - a_i > P/2$ for any side $a_i$. Consider the sum of the fractions written by Peter:

$$\frac{a_1}{P-a_1} + \frac{a_2}{P-a_2} + \cdots + \frac{a_{20}}{P-a_{20}} < \frac{a_1}{P/2} + \frac{a_2}{P/2} + \cdots + \frac{a_{20}}{P/2} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}}{P/2} = 2,$$

Q.E.D.

**Criteria:**

- it is noted that the length of a side of a polygon is less than the sum of the lengths of its other sides – 2 points;
- in addition to what is indicated in the previous row, it is noted that $P - a_i > P/2$ – 1 point;
- other reasoning is given, together with the previous ones, completing the solution to the task – 2 points.