

## 7<sup>th</sup> degree

### Task 1.

1. Хромая ладья (может передвигаться по горизонтали или вертикали, но только на одну клетку за ход), находясь в черной клетке, мгновенно перекрашивает все соседние белые клетки в красный цвет. Какое наибольшее число клеток бесконечной шахматной доски можно перекрасить в красный цвет, сделав 40 ходов хромой ладьей? Изначально хромая ладья находилась в белой клетке.

A lame rook (can move horizontally or vertically, but only one square per move), being in a black cell, instantly repaints all adjacent white cells into red color. What is the largest number of squares on an infinite chessboard that can be repainted with red by making 40 moves with a lame rook? Initially, the lame rook was in a white square.

**Answer:** 61

2. Хромая ладья (может передвигаться по горизонтали или вертикали, но только на одну клетку за ход), находясь в черной клетке, мгновенно перекрашивает все соседние белые клетки в красный цвет. Какое наибольшее число клеток бесконечной шахматной доски можно перекрасить в красный цвет, сделав 50 ходов хромой ладьей? Изначально хромая ладья находилась в белой клетке.

A lame rook (can move horizontally or vertically, but only one square per move), being in a black cell, instantly repaints all adjacent white cells into red color. What is the largest number of squares on an infinite chessboard that can be repainted with red by making 50 moves with a lame rook? Initially, the lame rook was in a white square.

**Answer:** 76

3. Хромая ладья (может передвигаться по горизонтали или вертикали, но только на одну клетку за ход), находясь в черной клетке, мгновенно перекрашивает все соседние белые клетки в красный цвет. Какое наибольшее число клеток бесконечной шахматной доски можно перекрасить в красный цвет, сделав 45 ходов хромой ладьей? Изначально хромая ладья находилась в белой клетке.

A lame rook (can move horizontally or vertically, but only one square per move), being in a black cell, instantly repaints all adjacent white cells into red color. What is the largest number of squares on an infinite chessboard that can be repainted with red by making 45 moves with a lame rook? Initially, the lame rook was in a white square.

**Answer:** 70

4. Хромая ладья (может передвигаться по горизонтали или вертикали, но только на одну клетку за ход), находясь в черной клетке, мгновенно перекрашивает все соседние белые клетки в красный цвет. Какое наибольшее число клеток бесконечной шахматной доски можно перекрасить в красный цвет, сделав 57 ходов хромой ладьей? Изначально хромая ладья находилась в белой клетке.

A lame rook (can move horizontally or vertically, but only one square per move), being in a black cell, instantly repaints all adjacent white cells into red color. What is the largest number of squares

on an infinite chessboard that can be repainted with red by making 57 moves with a lame rook? Initially, the lame rook was in a white square.

**Answer:** 88

**Solution (RUS).** (*представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично*) Сделав 40 ходов из белой клетки, хромая ладья побывает на 20 черных клетках, каждым ходом меняя цвет клетки, на которой стоит. Каждая черная клетка изначально окружена 4-мя белыми, но та белая, из которой ладья попала в очередную черную, уже перекрашена (за исключением начальной клетки) – значит, каждым ходом в черную клетку (за исключением первого) хромая ладья может перекрасить не более 3-х белых клеток.

Итак, количество белых клеток, которые может перекрасить ладья, не превышает  $4 + 19 \cdot 3 = 61$ . Такого количества можно добиться, если не менять направление движения ладьи.

**Solution (ENG).** (*given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly*) After making 40 moves from a white square, the lame rook will visit 20 black squares, switching its cell's color each move. Each black cell is initially surrounded by 4 white ones, but the white one from which the rook got into the next black one has already been repainted (except for the initial square), which means that with each move to a black cell (except for the first one) a lame rook can repaint no more than 3 white cells.

So, the number of white cells that the rook can repaint does not exceed  $4 + 19 \cdot 3 = 61$ . This amount can be achieved if you do not change the direction of the rook's movement.

## Task 2.

1. Сеть автобусных маршрутов города Иннополиса устроена так:

- общее количество автобусных остановок в городе – 9 штук, и любые две из них соединены дорогой;
- на каждом маршруте должны быть ровно 3 остановки (включая начало и конец маршрута);
- любые два автобусных маршрута имеют либо одну общую остановку, либо ни одной.

Какое наибольшее количество автобусных маршрутов может иметь город Иннополис?

The bus routes web in the town of Innopolis is built as follows:

- the total number of bus stops in the town is 9 with any two of them connected with a road;
- each route must have exactly 3 stops (including the beginning and end of the route);
- any two bus routes have either one common stop or none.

What is the largest number of bus routes the town of Innopolis can have?

**Answer:** 12

2. Сеть автобусных маршрутов города Иннополиса устроена так:

- общее количество автобусных остановок в городе – 9 штук, и любые две из них соединены дорогой;
- на каждом маршруте должны быть ровно 4 остановки (включая начало и конец маршрута);

- любые два автобусных маршрута имеют либо одну общую остановку, либо ни одной.

Какое наибольшее количество автобусных маршрутов может иметь город Иннополис?

The bus routes web in the town of Innopolis is built as follows:

- the total number of bus stops in the town is 9 with any two of them connected with a road;
- each route must have exactly 4 stops (including the beginning and end of the route);
- any two bus routes have either one common stop or none.

What is the largest number of bus routes the town of Innopolis can have?

**Answer: 3**

3. Сеть автобусных маршрутов города Иннополиса устроена так:

- общее количество автобусных остановок в городе – 10 штук, и любые две из них соединены дорогой;
- на каждом маршруте должны быть ровно 3 остановки (включая начало и конец маршрута);
- любые два автобусных маршрута имеют либо одну общую остановку, либо ни одной.

Какое наибольшее количество автобусных маршрутов может иметь город Иннополис?

The bus routes web in the town of Innopolis is built as follows:

- the total number of bus stops in the town is 10 with any two of them connected with a road;
- each route must have exactly 3 stops (including the beginning and end of the route);
- any two bus routes have either one common stop or none.

What is the largest number of bus routes the town of Innopolis can have?

**Answer: 13**

4. Сеть автобусных маршрутов города Иннополиса устроена так:

- общее количество автобусных остановок в городе – 12 штук, и любые две из них соединены дорогой;
- на каждом маршруте должны быть ровно 4 остановки (включая начало и конец маршрута);
- любые два автобусных маршрута имеют либо одну общую остановку, либо ни одной.

Какое наибольшее количество автобусных маршрутов может иметь город Иннополис?

The bus routes web in the town of Innopolis is built as follows:

- the total number of bus stops in the town is 12 with any two of them connected with a road;
- each route must have exactly 4 stops (including the beginning and end of the route);
- any two bus routes have either one common stop or none.

What is the largest number of bus routes the town of Innopolis can have?

**Answer:** 9

**Solution (RUS).** (*представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично*) «Зафиксируем» автобусную остановку  $X$  – одну из 9-и. Кроме нее, в городе есть еще 8 остановок, и на каждом автобусном маршруте, проходящем через  $X$ , есть еще 2 остановки, причем эти маршруты не могут иметь других общих остановок, кроме  $X$  – значит, таких маршрутов не более  $8 : 2 = 4$ .

Теперь занумеруем автобусные остановки числами от 1 до 9. Пусть в Иннополисе всего  $n$  автобусных маршрутов, из них  $n_1$  проходят через остановку 1,  $n_2$  – через остановку 2, и т.д. На каждом маршруте 3 остановки – значит,  $n_1 + n_2 + \dots + n_9 = 3n$ , при этом  $n_i \leq 4$  для любого  $i$  согласно доказанному выше. Следовательно,  $3n \leq 4 \cdot 9$ , откуда  $n \leq 12$ .

Покажем, как провести 12 маршрутов (цифры обозначают номера остановок, а трехзначные числа – автобусные маршруты): 123, 456, 789, 147, 258, 369, 249, 168, 267, 348, 159, 357.

**Solution (ENG).** (*given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly*) Lets «fix» bus stop  $X$  – one of the 9. In addition to it, there are 8 more bus stops in the city, and on each bus route passing through  $X$ , there are 2 more stops, and these routes cannot have other stops in common except  $X$  – therefore, there are no more than  $8 : 2 = 4$  such routes.

Now let's enumerate the bus stops with numbers from 1 to 9. Let there be only  $n$  bus routes in Innopolis, of which  $n_1$  go through stop 1,  $n_2$  go through stop 2, etc. There are 3 stops on each route – by that,  $n_1 + n_2 + \dots + n_9 = 3n$ , while  $n_i \leq 4$  for any  $i$  according to what was proven above. Therefore,  $3n \leq 4 \cdot 9$ , thus  $n \leq 12$ .

Finally, let's show how to establish the 12 routes (digits indicate bus stops, and three-digit numbers indicate bus routes): 123, 456, 789, 147, 258, 369, 249, 168, 267, 348, 159, 357.

### Task 3.

1. Дан набор из 10 палочек длины  $1, 2, 3, \dots, 10$  (по одной палочке каждой длины). Сколькими способами можно составить из этих палочек треугольник?

Given a set of 10 sticks of lengths  $1, 2, 3, \dots, 10$  (one stick of each length). How many ways are there to form a triangle from these sticks?

**Answer:** 50

2. Дан набор из 12 палочек длины  $1, 2, 3, \dots, 12$  (по одной палочке каждой длины). Сколькими способами можно составить из этих палочек треугольник?

Given a set of 12 sticks of lengths  $1, 2, 3, \dots, 12$  (one stick of each length). How many ways are there to form a triangle from these sticks?

**Answer:** 95

3. Дан набор из 14 палочек длины  $1, 2, 3, \dots, 14$  (по одной палочке каждой длины). Сколькими способами можно составить из этих палочек треугольник?

Given a set of 14 sticks of lengths  $1, 2, 3, \dots, 14$  (one stick of each length). How many ways are there to form a triangle from these sticks?

**Answer:** 161

4. Дан набор из 16 палочек длины  $1, 2, 3, \dots, 16$  (по одной палочке каждой длины). Сколькими способами можно составить из этих палочек треугольник?

Given a set of 16 sticks of lengths  $1, 2, 3, \dots, 16$  (one stick of each length). How many ways are there to form a triangle from these sticks?

**Answer:** 252

**Solution (RUS).** (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично) Пусть  $1 \leq a < b < c \leq 10$  – стороны треугольника. Чтобы этот треугольник существовал и был невырожденным, требуется выполнение неравенства треугольника, причем достаточно соблюсти его только для наибольшей стороны:  $c < a + b$ . Также очевидно, что  $c \geq 4$ : действительно, если  $c = 3$ , то  $a = 1, b = 2$  и треугольник получается вырожденным (все его вершины лежат на одной прямой), а про меньшие  $c$  и сказать нечего.

При каждом  $c$  число  $a$  может меняться от 1 до  $b - 1$ , при этом  $a > c - b$  из неравенства треугольника – значит,  $a$  принимает все натуральные значения от  $c - b + 1$  до  $b - 1$  включительно – итого  $b - 1 - (c - b + 1) + 1 = 2b - c - 1$  значений.

Число  $b$  должно быть таким, чтобы  $2b - c - 1$  было неотрицательным, т.к.  $b \geq a + 1 \geq c - b + 1$  – а значит,  $\frac{c+1}{2} \leq b \leq c - 1$ .

Значит, количество треугольников, которые можно составить из данных в условии палочек при фиксированном  $c$ , равно

$$S_c = \sum_{b \geq (c+1)/2}^{c-1} (2b - c - 1)$$

Если  $c = 2k$  (для некоторого натурального  $k$ ), то эта сумма равна

$$S_c = \sum_{k+1}^{2k-1} (2b - 2k - 1) = 2 \sum_{k+1}^{2k-1} b - (2k + 1) \sum_{k+1}^{2k-1} 1 = (k - 1)^2 = \frac{1}{4}(c - 2)^2$$

Если же  $c$  – нечетное, т.е.  $c = 2k - 1$  для некоторого натурального  $k$ , то получим сумму

$$S_c = \sum_k^{2k-2} (2b - 2k) = 2 \sum_k^{2k-2} b - 2k \sum_k^{2k-2} 1 = (k - 1)(k - 2) = \frac{1}{4}(c - 1)(c - 3)$$

Осталось подсчитать соответствующие суммы для  $c = 4, 5, \dots, 10$  и сложить их:

$$\sum_{c=4}^{10} S_c = 50$$

**Solution (ENG).** (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly) Let  $1 \leq a < b < c \leq 10$  be the sides of the triangle. For this triangle to exist and be non-degenerate, the triangle inequality must be satisfied, and it is enough to satisfy it only for the largest side:  $c < a + b$ . It is also obvious that  $c \geq 4$ : indeed, if  $c = 3$ , then  $a = 1, b = 2$  and the triangle turns out to be degenerate (all its vertices lie on the same line), and there is nothing to say about smaller  $c$ .

For each  $c$ , the number  $a$  can change from 1 to  $b - 1$ , while  $a > c - b$  from the triangle inequality means  $a$  takes all positive integer values from  $c - b + 1$  up to  $b - 1$  – total of  $b - 1 - (c - b + 1) + 1 = 2b - c - 1$  values.

The number  $b$  must be such that  $2b - c - 1$  is non-negative, because  $b \geq a + 1 \geq c - b + 1$  – which means  $\frac{c+1}{2} \leq b \leq c - 1$ .

By that, the number of triangles that can be formed from the task's formulation for a fixed  $c$  is equal to

$$S_c = \sum_{b \geq (c+1)/2}^{c-1} (2b - c - 1)$$

If  $c = 2k$  (for some positive integer  $k$ ), then this sum is equal to

$$S_c = \sum_{k+1}^{2k-1} (2b - 2k - 1) = 2 \sum_{k+1}^{2k-1} b - (2k + 1) \sum_{k+1}^{2k-1} 1 = (k - 1)^2 = \frac{1}{4}(c - 2)^2$$

If  $c$  is odd, i.e.  $c = 2k - 1$  for some positive integer  $k$ , then we get the sum

$$S_c = \sum_k^{2k-2} (2b - 2k) = 2 \sum_k^{2k-2} b - 2k \sum_k^{2k-2} 1 = (k - 1)(k - 2) = \frac{1}{4}(c - 1)(c - 3)$$

It remains to calculate the corresponding sums for  $c = 4, 5, \dots, 10$  and add them up:

$$\sum_{c=4}^{10} S_c = 50$$

#### Task 4.

1. В кондитерской есть наборы пирожных по 1, 2, 3, 4, 5 штук в коробке. Покупатель, пятиголовый пятирук, хочет купить 5 коробок (по одной в каждую руку) так, чтобы общее число пирожных делилось на 5 (поровну каждой голове). Сколькими способами он сможет это сделать? Все пирожные одинаковые, наборы с одинаковым количеством пирожных считаем неразличимыми, каждый набор в кондитерской имеется как минимум в 5 экземплярах, и неважно, какой набор в какой руке находится.

The bakery has sets of cakes for 1, 2, 3, 4, 5 pieces per box. The five-headed five-handed buyer wants to buy 5 boxes (one for each hand) such that the total number of cakes in them is divisible by 5 (equally for each head). How many ways there are for the buyer to do this? All cakes are the same; boxes with the same number of cakes are indistinguishable; each box in the bakery is available in at least 5 copies, and it doesn't matter which box which hand holds.

**Answer:** 26

2. В кондитерской есть наборы пирожных по 1, 2, 3, 4, 5 штук в коробке. Покупатель, шестиголовый пятирук, хочет купить 5 коробок (по одной в каждую руку) так, чтобы общее число пирожных делилось на 6 (поровну каждой голове). Сколькими способами он сможет это сделать? Все пирожные одинаковые, наборы с одинаковым количеством пирожных считаем неразличимыми, каждый набор в кондитерской имеется как минимум в 5 экземплярах, и неважно, какой набор в какой руке находится.

The bakery has sets of cakes for 1, 2, 3, 4, 5 pieces per box. The six-headed five-handed buyer wants to buy 5 boxes (one for each hand) such that the total number of cakes in them is divisible by 6 (equally for each head). How many ways there are for the buyer to do this? All cakes are the same; boxes with the same number of cakes are indistinguishable; each box in the bakery is available in at least 5 copies, and it doesn't matter which box which hand holds.

**Answer:** 20

3. В кондитерской есть наборы пирожных по 1, 2, 3, 4, 5 штук в коробке. Покупатель, семиголовый пятирук, хочет купить 5 коробок (по одной в каждую руку) так, чтобы общее число пирожных делилось на 7 (поровну каждой голове). Сколькими способами он сможет это сделать? Все пирожные одинаковые, наборы с одинаковым количеством пирожных считаем неразличимыми, каждый набор в кондитерской имеется как минимум в 5 экземплярах, и неважно, какой набор в какой руке находится.

The bakery has sets of cakes for 1, 2, 3, 4, 5 pieces per box. The seven-headed five-handed buyer wants to buy 5 boxes (one for each hand) such that the total number of cakes in them is divisible by 7 (equally for each head). How many ways there are for the buyer to do this? All cakes are the same; boxes with the same number of cakes are indistinguishable; each box in the bakery is available in at least 5 copies, and it doesn't matter which box which hand holds.

**Answer:** 18

4. В кондитерской есть наборы пирожных по 1, 2, 3, 4, 5 штук в коробке. Покупатель, восьмиголовый пятирук, хочет купить 5 коробок (по одной в каждую руку) так, чтобы общее число пирожных делилось на 8 (поровну каждой голове). Сколькими способами он сможет это сделать? Все пирожные одинаковые, наборы с одинаковым количеством пирожных считаем неразличимыми, каждый набор в кондитерской имеется как минимум в 5 экземплярах, и неважно, какой набор в какой руке находится.

The bakery has sets of cakes for 1, 2, 3, 4, 5 pieces per box. The eight-headed five-handed buyer wants to buy 5 boxes (one for each hand) such that the total number of cakes in them is divisible by 8 (equally for each head). How many ways there are for the buyer to do this? All cakes are the same; boxes with the same number of cakes are indistinguishable; each box in the bakery is available in at least 5 copies, and it doesn't matter which box which hand holds.

**Answer:** 15

**Solution (RUS).** (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично) Общее количество пирожных, которые может купить пятиголовый пятирук, не меньше 5 (5 наборов по 1 шт.) и не больше 25 (5 наборов по 5 шт.). Чтобы это число делилось на 5, оно должно равняться  $n = 5, 10, 15, 20$  или 25. Подсчитаем количество способов набрать соответствующее число пирожных, купив 5 наборов. Для удобства (и чтобы было ясно, что мы ничего не упустили) упорядочим содержания наборов по возрастанию (для каждого  $n$ ) количеств пирожных в коробках:

- $n = 5$ :  $1 + 1 + 1 + 1 + 1$  (1 способ);
- $n = 10$ :  $1 + 1 + 1 + 2 + 5 = 1 + 1 + 1 + 3 + 4 = 1 + 1 + 2 + 2 + 4 = 1 + 1 + 2 + 3 + 3 = 1 + 2 + 2 + 2 + 3 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$  (6 способов);
- $n = 15$ :  $1 + 1 + 3 + 5 + 5 = 1 + 1 + 4 + 4 + 5 = 1 + 2 + 2 + 5 + 5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 1 + 2 + 4 + 4 + 4 = 1 + 3 + 3 + 3 + 5 = 1 + 3 + 3 + 4 + 4 = 2 + 2 + 2 + 4 + 5 = 2 + 2 + 3 + 3 + 5 = 2 + 2 + 3 + 4 + 4 = 2 + 3 + 3 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$  (12 способов);
- $n = 20$ :  $1 + 4 + 5 + 5 + 5 = 2 + 3 + 5 + 5 + 5 = 2 + 4 + 4 + 5 + 5 = 3 + 3 + 4 + 5 + 5 = 3 + 4 + 4 + 4 + 5 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4$  (6 способов);
- $n = 25$ :  $5 + 5 + 5 + 5 + 5$  (1 способ).

Итого  $1 + 6 + 12 + 6 + 1 = 26$  способов.

**Solution (ENG).** (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly) The total number of cakes that a five-headed five-handed customer can buy is not less than 5 (i.e. 5 sets of 1 piece) and not more than 25 (i.e. 5 sets of 5 pieces). For this number to be divisible by 5, it must be equal to  $n = 5, 10, 15, 20$  or 25. Let's count the number of ways to get the corresponding number of cakes by purchasing 5 sets. For convenience (and to make it clear that we have not missed anything), we will order the numbers of cakes of the sets in ascending order (for each  $n$ ):

- $n = 5$ :  $1 + 1 + 1 + 1 + 1$  (1 way);
- $n = 10$ :  $1 + 1 + 1 + 2 + 5 = 1 + 1 + 1 + 3 + 4 = 1 + 1 + 2 + 2 + 4 = 1 + 1 + 2 + 3 + 3 = 1 + 2 + 2 + 2 + 3 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$  (6 ways);
- $n = 15$ :  $1 + 1 + 3 + 5 + 5 = 1 + 1 + 4 + 4 + 5 = 1 + 2 + 2 + 5 + 5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 1 + 2 + 4 + 4 + 4 = 1 + 3 + 3 + 3 + 5 = 1 + 3 + 3 + 4 + 4 = 2 + 2 + 2 + 4 + 5 = 2 + 2 + 3 + 3 + 5 = 2 + 2 + 3 + 4 + 4 = 2 + 3 + 3 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$  (12 ways);
- $n = 20$ :  $1 + 4 + 5 + 5 + 5 = 2 + 3 + 5 + 5 + 5 = 2 + 4 + 4 + 5 + 5 = 3 + 3 + 4 + 5 + 5 = 3 + 4 + 4 + 4 + 5 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4$  (6 ways);
- $n = 25$ :  $5 + 5 + 5 + 5 + 5$  (1 way).

Thus, there are  $1 + 6 + 12 + 6 + 1 = 26$  ways in total.

## Task 5.

1. Людоед поймал двух математиков и сказал им следующее:

«Завтра я напишу на этой доске полный квадрат натурального числа – некоторое  $m^2$ , потом приведу одного из вас, и он допишет справа столько последовательных квадратов  $(m + 1)^2, (m + 2)^2, \dots$ , сколько захочет, но не менее 10. После этого я уведу его и приведу второго: он расставит между выписанными квадратами знаки '+' и '-' по своему усмотрению. Если значение получившегося выражения будет равно нулю, я отпущу вас обоих, а если нет – обоих съем. Времени на переговоры я вам не дам ни сегодня, ни завтра.»

Смогут ли математики спастись независимо от значения  $m$ ? Обоснуйте свой ответ.

The cannibal caught two mathematicians and told them the following:

«Tomorrow I will write on this board the complete square of a positive integer, i.e. some  $m^2$ , then I will bring one of you, and he will add to the right as many consecutive squares  $(m + 1)^2, (m + 2)^2, \dots$  as he wants, but not less than 10 of them. After that, I will take him away and bring in a second one of you: he will place the signs '+' and '-' between the written squares at his discretion. If the value of the resulting expression will be equal to zero, then I will let you both go, and if the value will not be zero, then I will eat both of you. I won't give you time for discussions either today or tomorrow.»

Can mathematicians save themselves regardless of the number the cannibal writes down? Explain your answer.

2. Людоед поймал двух математиков и сказал им следующее:

«Завтра я напишу на этой доске полный квадрат натурального числа – некоторое  $m^2$ , потом приведу одного из вас, и он допишет справа столько последовательных квадратов  $(m + 1)^2, (m + 2)^2, \dots$ , сколько захочет, но не менее 30. После этого я уведу его и приведу второго: он расставит между выписанными квадратами знаки '+' и '-' по своему усмотрению. Если значение получившегося выражения будет равно нулю, я отпущу вас обоих, а если нет – обоих съем. Времени на переговоры я вам не дам ни сегодня, ни завтра.»

Смогут ли математики спастись независимо от значения  $m$ ? Обоснуйте свой ответ.

The cannibal caught two mathematicians and told them the following:

«Tomorrow I will write on this board the complete square of a positive integer, i.e. some  $m^2$ , then I will bring one of you, and he will add to the right as many consecutive squares  $(m+1)^2, (m+2)^2, \dots$  as he wants, but not less than 30 of them. After that, I will take him away and bring in a second one of you: he will place the signs '+' and '-' between the written squares at his discretion. If the value of the resulting expression will be equal to zero, then I will let you both go, and if the value will not be zero, then I will eat both of you. I won't give you time for discussions either today or tomorrow.»

Can mathematicians save themselves regardless of the number the cannibal writes down? Explain your answer.

3. Людоед поймал двух математиков и сказал им следующее:

«Завтра я напишу на этой доске полный квадрат натурального числа – некоторое  $m^2$ , потом приведу одного из вас, и он допишет справа столько последовательных квадратов  $(m+1)^2, (m+2)^2, \dots$ , сколько захочет, но не менее 17. После этого я уведу его и приведу второго: он расставит между выписанными квадратами знаки '+' и '-' по своему усмотрению. Если значение получившегося выражения будет равно нулю, я отпущу вас обоих, а если нет – обоих съем. Времени на переговоры я вам не дам ни сегодня, ни завтра.»

Смогут ли математики спастись независимо от значения  $m$ ? Обоснуйте свой ответ.

The cannibal caught two mathematicians and told them the following:

«Tomorrow I will write on this board the complete square of a positive integer, i.e. some  $m^2$ , then I will bring one of you, and he will add to the right as many consecutive squares  $(m+1)^2, (m+2)^2, \dots$  as he wants, but not less than 17 of them. After that, I will take him away and bring in a second one of you: he will place the signs '+' and '-' between the written squares at his discretion. If the value of the resulting expression will be equal to zero, then I will let you both go, and if the value will not be zero, then I will eat both of you. I won't give you time for discussions either today or tomorrow.»

Can mathematicians save themselves regardless of the number the cannibal writes down? Explain your answer.

4. Людоед поймал двух математиков и сказал им следующее:

«Завтра я напишу на этой доске полный квадрат натурального числа – некоторое  $m^2$ , потом приведу одного из вас, и он допишет справа столько последовательных квадратов  $(m+1)^2, (m+2)^2, \dots$ , сколько захочет, но не менее 20. После этого я уведу его и приведу второго: он расставит между выписанными квадратами знаки '+' и '-' по своему усмотрению. Если значение получившегося выражения будет равно нулю, я отпущу вас обоих, а если нет – обоих съем. Времени на переговоры я вам не дам ни сегодня, ни завтра.»

Смогут ли математики спастись независимо от значения  $m$ ? Обоснуйте свой ответ.

The cannibal caught two mathematicians and told them the following:

«Tomorrow I will write on this board the complete square of a positive integer, i.e. some  $m^2$ , then I will bring one of you, and he will add to the right as many consecutive squares  $(m+1)^2, (m+2)^2, \dots$  as he wants, but not less than 20 of them. After that, I will take him away and bring in a second one of you: he will place the signs '+' and '-' between the written squares at his discretion. If the

value of the resulting expression will be equal to zero, then I will let you both go, and if the value will not be zero, then I will eat both of you. I won't give you time for discussions either today or tomorrow.»

Can mathematicians save themselves regardless of the number the cannibal writes down? Explain your answer.

**Solution (RUS).** (*представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично*) Заметим, что для любого  $n$  выполнено  $n^2 - (n + 1)^2 - (n + 2)^2 + (n + 3)^2 = 4$ . Из этого следует, что  $m^2 - (m + 1)^2 - (m + 2)^2 + (m + 3)^2 - (m + 4)^2 + (m + 5)^2 + (m + 6)^2 - (m + 7)^2 = 0$  для любого  $m$ .

Чтобы спастись, математики могут действовать следующим образом: первый дописывает, например, 95 последовательных квадратов  $((m + 1)^2, (m + 2)^2, \dots, (m + 95)^2)$ , а второй расставляет знаки перед ними следующим образом:  $--+-++--+$  и т.д., повторяя указанную последовательность восьми знаков. Тогда первые 8 слагаемых дадут в сумме 0, как и следующие 8 слагаемых, и т.д. – общая сумма также будет равна 0.

**Критерии оценивания:**

- показано, что разности последовательных квадратов – последовательные нечетные числа – 1 балл;
- показано, что разности последовательных квадратов – последовательные нечетные числа, но знаки между квадратами расставлены неверно – 2 балла;
- доказано, что группы по 8 последовательных квадратов могут давать 0, но не указаны знаки между ними – 3 балла;
- приведено решение для 8 квадратов, но не сказано про группы по 8, либо допущена арифметическая ошибка на последнем этапе решения – 4 балла;
- задача решена полностью верно – 5 баллов.

**Solution (ENG).** (*given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly*) Note that for any  $n$  we have  $n^2 - (n + 1)^2 - (n + 2)^2 + (n + 3)^2 = 4$ . By that,  $m^2 - (m + 1)^2 - (m + 2)^2 + (m + 3)^2 - (m + 4)^2 + (m + 5)^2 + (m + 6)^2 - (m + 7)^2 = 0$  for any  $m$ .

To save themselves, mathematicians can act as follows: the first one adds, for example, 95 consecutive squares  $((m + 1)^2, (m + 2)^2, \dots, (m + 95)^2)$ , and the second one places the signs in front of them as follows:  $--+-++--+$ , etc., repeating the specified sequence of eight signs. Then the first 8 terms will add up to 0, as will the next 8 terms, etc. – the total sum will also be 0.

**Criteria:**

- it is shown that the differences of consecutive squares are consecutive odd numbers – 1 point;
- it is shown that the differences between consecutive squares are consecutive odd numbers, but the signs between the squares are placed incorrectly – 2 points;
- it is proven that groups of 8 consecutive squares can give 0, but the signs between them are not indicated – 3 points;
- the solution for 8 squares is given, but not indicated for many group of 8 squares, or an arithmetic error was made at the last stage of the solution – 4 points;
- the solution is full and correct – 5 points.

**Task 6.**

1. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

- восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
- восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
- ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
- восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

Изначально были проблемы с 10 аккаунтами пользователей, и 15 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. Сможет ли Игорь добиться этого? Обоснуйте свой ответ.

Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

- restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
- restore two accounts – then a new question from the user will appear;
- answer one user question – then two new questions will appear;
- restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

Initially, there were problems with 10 user accounts, and 15 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. Can Igor manage to do that? Explain your answer.

2. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

- восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
- восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
- ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
- восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

Изначально были проблемы с 14 аккаунтами пользователей, и 15 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. Сможет ли Игорь добиться этого? Обоснуйте свой ответ.

Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

- restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
- restore two accounts – then a new question from the user will appear;
- answer one user question – then two new questions will appear;

- restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

Initially, there were problems with 14 user accounts, and 15 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. Can Igor manage to do that? Explain your answer.

3. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

- восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
- восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
- ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
- восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

Изначально были проблемы с 12 аккаунтами пользователей, и 17 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. Сможет ли Игорь добиться этого? Обоснуйте свой ответ.

Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

- restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
- restore two accounts – then a new question from the user will appear;
- answer one user question – then two new questions will appear;
- restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

Initially, there were problems with 12 user accounts, and 17 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. Can Igor manage to do that? Explain your answer.

4. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

- восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
- восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
- ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
- восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

Изначально были проблемы с 15 аккаунтами пользователей, и 10 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов

сегодня уже не будет. Сможет ли Игорь добиться этого? Обоснуйте свой ответ.

Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

- restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
- restore two accounts – then a new question from the user will appear;
- answer one user question – then two new questions will appear;
- restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

Initially, there were problems with 15 user accounts, and 10 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. Can Igor manage to do that? Explain your answer.

**Solution (RUS).** (*представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично*) Вот как может действовать Игорь, чтобы добиться желаемого:

- 1) 15 раз выполнить операцию №4: в результате не останется вопросов пользователей, но останутся 10 «сломанных» аккаунтов;
- 2) по 4 раза (поочередно) выполнить пару операций №2 и №4: в результате останутся только 2 «сломанных» аккаунта;
- 3) выполнить операцию №2: в результате не останется ни «сломанных» аккаунтов, ни вопросов пользователей.

**Критерии оценивания:**

- условие интерпретировано в терминах пар неотрицательных целых чисел – 1 балл;
- показаны первые действия с использованием только операций 2 и 4 – 2 балла;
- приведена в целом верная последовательность действий, но одна из операций использована некорректно (например, операция 4 при отсутствии «сломанных» аккаунтов) – 3 балла;
- решение не до конца обосновано, либо присутствует арифметическая ошибка на последнем этапе – 4 балла;
- решение полностью верное – 5 баллов.

**Solution (ENG).** (*given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly*) Here's how Igor can act to achieve the goal:

- 1) perform operation 4 fifteen times: as a result, there will be no user questions left, but 10 unrestored accounts will remain;
- 2) perform a pair of operations 2 and 4 four times (alternately): as a result, only 2 unrestored accounts will remain;
- 3) perform operation 2: as a result, there will be no unrestored accounts and user questions left.

**Criteria:**

- the task's formulation is interpreted in terms of pairs of non-negative integers – 1 point;
- the first actions are shown using only operations 2 and 4 – 2 points;
- the generally correct sequence of actions is given, but one of the operations is used incorrectly (for example, operation 4 in the absence of unrestored accounts) – 3 points;

- the solution is not full, or there is an arithmetic error at its last stage – 4 points;
- the solution is full and correct – 5 points.