8-9th degree

Task 1.

1. Натуральное число a, в десятичной записи оканчивающееся на цифру d, удовлетворяет равенству
$$\frac{a}{891} = 0.d4d4d4d4\ldots = 0.(d4)$$
– периодическая десятичная дробь. Найдите a.

   Positive integer a ends with decimal digit d and satisfies
$$\frac{a}{891} = 0.d4d4d4d4\ldots = 0.(d4)$$
– periodical decimal fraction. Find a.

   Answer: 576

2. Натуральное число a, кратное цифре d $(2 \leq d \leq 9)$, удовлетворяет равенству
$$\frac{a}{495} = 0.0d6d6d6d6\ldots = 0.0(d6)$$
– периодическая десятичная дробь. Найдите a.

   Positive integer a is divisible by the decimal digit d $(2 \leq d \leq 9)$ and satisfies
$$\frac{a}{495} = 0.0d6d6d6d6\ldots = 0.0(d6)$$
– periodical decimal fraction. Find a.

   Answer: 18

3. Натуральное число a, в десятичной записи оканчивающееся на цифру $d > 0$, удовлетворяет равенству
$$\frac{a}{693} = 0.3d3d3d3d\ldots = 0.(3d)$$
– периодическая десятичная дробь. Найдите a.

   Positive integer a ends with decimal digit $d > 0$ and satisfies
$$\frac{a}{693} = 0.3d3d3d3d\ldots = 0.(3d)$$
– periodical decimal fraction. Find a.

   Answer: 245

4. Натуральное число a, в десятичной записи оканчивающееся на цифру d, удовлетворяет равенству
$$\frac{a}{396} = 0.d3d3d3d3\ldots = 0.(d3)$$
– периодическая десятичная дробь. Найдите a.

   Positive integer a ends with decimal digit d and satisfies
$$\frac{a}{396} = 0.d3d3d3d3\ldots = 0.(d3)$$
– periodical decimal fraction. Find a.

   Answer: 92

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть $x = 0.(d4)$, тогда $100x = \overline{d4.(d4)}$ и $100x - x = 99x = \overline{d4}$, откуда $x = \overline{d4}/99 = \frac{10d+4}{99}$. Первоначальное равенство можно представить в виде $\frac{a}{891} = \frac{10d+4}{99} \Rightarrow a = 90 \cdot d + 36$. Очевидно, число a при любом d оканчивается на 6, откуда $d = 6$ и $a = 576$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let $x = 0.(d4)$, then $100x = \overline{d4.(d4)}$ and $100x - x = 99x = \overline{d4}$, thus $x = \overline{d4}/99 = \frac{10d+4}{99}$. The initial equality can be represented as $\frac{a}{891} = \frac{10d+4}{99} \Rightarrow a = 90 \cdot d + 36$. Obviously, the number a ends with 6 for any d, thus $d = 6$ and $a = 576$.

Task 2.

1. Дано множество A натуральных чисел, не превосходящих 15. Сколькими способами можно выбрать из него подмножество, содержащее хотя бы одно простое число?

   Given set A of all positive integers not exceeding 15. How many ways are there to choose its subset which contains at least one prime number?

   Answer: 32256

2. Дано множество A натуральных чисел, не превосходящих 17. Сколькими способами можно выбрать из него подмножество, содержащее хотя бы одно простое число?

   Given set A of all positive integers not exceeding 17. How many ways are there to choose its subset which contains at least one prime number?

   Answer: 130048

3. Дано множество A натуральных чисел, не превосходящих 13. Сколькими способами можно выбрать из него подмножество, содержащее хотя бы одно простое число?

   Given set A of all positive integers not exceeding 13. How many ways are there to choose its subset which contains at least one prime number?

   Answer: 8064

4. Дано множество A натуральных чисел, не превосходящих 16. Сколькими способами можно выбрать из него подмножество, содержащее хотя бы одно простое число?

   Given set A of all positive integers not exceeding 16. How many ways are there to choose its subset which contains at least one prime number?

   Answer: 64512

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Есть ровно 2^n способов выбрать подмножество из множества с n элементами – значит, из множества A можно выбрать подмножество $2^{15} = 32768$ способами. Множество A содержит шесть простых чисел $(2, 3, 5, 7, 11, 13)$, остальные девять не являются простыми, и составить подмножество только с ними можно $2^9 = 512$ способами. Остальные подмножества A будут содержать простое число, их количество равно $32768 - 512 = 32256$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* There are 2^n ways to choose subset of a set with n elements, thus there are $2^{15} = 32768$ ways to choose subset from the set A. There are 6 primes $(2, 3, 5, 7, 11, 13)$ in the set, so other 9 numbers are not prime and we can choose $2^9 = 512$ subsets of A using only these 9 non-primes. Other $32768 - 512 = 32256$ subsets will contain at least one prime each.

Task 3.

1. Есть чашечные весы (чашки вмещают любой объем), гирька весом в 1 грамм, мешок сахарного песка и совочек. Дополнительных ёмкостей нет, в чашке две кучки сахара сразу смешиваются. Определите минимальное число взвешиваний, необходимых для того, чтобы отмерить 2023 грамма сахара.

   There are weighing scale (its cups can hold any volume), a 1 gram weight, and a bag of granulated sugar and a scoop. There are no additional containers; in a cup, two piles of sugar are immediately mixed. Determine the minimum number of weighings required to measure 2023 grams of sugar.

   Answer: 11

2. Есть чашечные весы (чашки вмещают любой объем), гирька весом в 2 грамма, мешок сахарного песка и совочек. Дополнительных ёмкостей нет, в чашке две кучки сахара сразу смешиваются. Определите минимальное число взвешиваний, необходимых для того, чтобы отмерить 2024 грамма сахара.

   There are weighing scale (its cups can hold any volume), a 2 grams weight, and a bag of granulated sugar and a scoop. There are no additional containers; in a cup, two piles of sugar are immediately mixed. Determine the minimum number of weighings required to measure 2024 grams of sugar.

   Answer: 10

3. Есть чашечные весы (чашки вмещают любой объем), гирька весом в 1 грамм, мешок сахарного песка и совочек. Дополнительных ёмкостей нет, в чашке две кучки сахара сразу смешиваются. Определите минимальное число взвешиваний, необходимых для того, чтобы отмерить 199 грамм сахара.

   There are weighing scale (its cups can hold any volume), a 1 gram weight, and a bag of granulated sugar and a scoop. There are no additional containers; in a cup, two piles of sugar are immediately mixed. Determine the minimum number of weighings required to measure 199 grams of sugar.

   Answer: 8

4. Есть чашечные весы (чашки вмещают любой объем), гирька весом в 2 грамма, мешок сахарного песка и совочек. Дополнительных ёмкостей нет, в чашке две кучки сахара сразу смешиваются. Определите минимальное число взвешиваний, необходимых для того, чтобы отмерить 198 грамм сахара.

   There are weighing scale (its cups can hold any volume), a 2 grams weight, and a bag of granulated sugar and a scoop. There are no additional containers; in a cup, two piles of sugar are immediately mixed. Determine the minimum number of weighings required to measure 198 grams of sugar.

   Answer: 7

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть k – количство грамм сахара на одной из чаш весов. За одно взвешивание мы можем удвоить k (положив на другую чашу весов столько же сахара, уравновесив чаши) или разделить k пополам (разделив имеющуюся кучку на две равные по весу). Имея дополнительно гирю массой n грамм, мы можем за одно взвешивание получить $k+n$ или $k-n$ грамм. Сочетая описанные действия, можно за одно взвешивание получить $2k+n$ или $2k-n$ грамм.

$$2023 = 2\cdot 1011+1 = 2\cdot(2\cdot 505+1)+1 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 252+1)+1)+1 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 2\cdot 126+1)+1)+1 = \cdots$$
$$\cdots = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1-1)+1)+1)+1$$

– здесь количество умножений на 2 равно количеству взвешиваний, т.е. 11 взвешиваний хватит:

$$0\to 1\to 3\to 7\to 15\to 31\to 63\to 127\to 253\to 506\to 1012\to 2023$$

Покажем, что 10 взвешиваний всегда недостаточно. Для этого сначала заметим, что в условиях задачи, имея гирю в n грамм и кучку в k грамм сахара, за одно взвешивание мы можем получить не более $2k+n$ грамм сахара. Тогда наибольший возможный вес, который можно отмерить за 10 взвешиваний, равен

$$0 \to 1 \to 3 \to 7 \to 15 \to 31 \to 63 \to 127 \to 255 \to 511 \to 1023$$

грамма.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let k be the number of grams of sugar on one of the cups. During one weighing we can double k (putting the same amount of sugar on the other cup of the scale, balancing the cups) or divide k in half (dividing the existing cup into two equally weighting ones). Having an additional weight of n grams, we can obtain $k+n$ or $k-n$ grams in one weighing. By combining the described actions we can obtain $2k+n$ or $2k-n$ grams in one weighing.

$$2023 = 2\cdot 1011+1 = 2\cdot(2\cdot 505+1)+1 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 252+1)+1)+1 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 2\cdot 126+1)+1)+1 = \cdots$$
$$\cdots = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1-1)+1)+1)+1$$

– here the number of multiplications by 2 is equal to the number of weightings, thus 11 of them is enough to obtain 2023 grams of sugar:

$$0 \to 1 \to 3 \to 7 \to 15 \to 31 \to 63 \to 127 \to 253 \to 506 \to 1012 \to 2023$$

Lets prove that 10 weighings are never enough for it. To do that, first note that while having a weight of n grams and a pile of k grams of sugar, we can obtain at most $2k+n$ grams of sugar with one weighing. Then the largest possible weight that can be obtained with 10 weighings is

$$0 \to 1 \to 3 \to 7 \to 15 \to 31 \to 63 \to 127 \to 255 \to 511 \to 1023$$

grams.

Task 4.

1. В треугольной комнате с углами A, B, C установлена непрозрачная перегородка CO (от пола до потолка) так, что из угла B видна ровно половина стены AC, а из угла A – ровно треть стены BC. Игорь хочет установить в комнате умную колонку «VK Капсула» с Марусей так, чтобы любая прямая, параллельная полу комнаты и проходящая через колонку, пересекала либо перегородку CO, либо стену AB. Стены комнаты и перегородка перпендикулярны полу и имеют форму прямоугольников, колонку можно считать точечным объектом.
   Какая часть площади комнаты подходит Игорю для установки колонки? Запишите ответ в виде десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.

   In a triangular room with corners A, B, C, a new opaque wall CO (from the floor to the ceiling) is installed in such way that exactly half of the wall AC is visible from the corner B, and exactly a third of the BC wall is visible from the corner A. Igor wants to install a smart speaker «VK Capsule» with Marusya in the room so that any straight line parallel to the floor of the room and passing through the speaker will intersect either the wall CO or the wall AB. The walls of the room are perpendicular to the floor and have the shape of rectangles; the smart speaker can be considered a point object.
   What part of the room area is suitable for installing the speaker in the way Igor wants? Write your answer as a decimal, rounded to 2 decimal digits if necessary.

   Answer: 0.42

2. В треугольной комнате с углами A, B, C установлена непрозрачная перегородка CO (от пола до потолка) так, что из угла B видна ровно половина стены AC, а из угла A – ровно четверть стены BC. Игорь хочет установить в комнате умную колонку «VK Капсула» с Марусей так, чтобы любая прямая, параллельная полу комнаты и проходящая через колонку, пересекала либо перегородку CO, либо стену AB. Стены комнаты и перегородка перпендикулярны полу и имеют форму прямоугольников, колонку можно считать точечным объектом.
Какая часть площади комнаты подходит Игорю для установки колонки? Запишите ответ в виде десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.

   In a triangular room with corners A, B, C, a new opaque wall CO (from the floor to the ceiling) is installed in such way that exactly half of the wall AC is visible from the corner B, and exactly a quarter of the BC wall is visible from the corner A. Igor wants to install a smart speaker «VK Capsule» with Marusya in the room so that any straight line parallel to the floor of the room and passing through the speaker will intersect either the wall CO or the wall AB. The walls of the room are perpendicular to the floor and have the shape of rectangles; the smart speaker can be considered a point object.
What part of the room area is suitable for installing the speaker in the way Igor wants? Write your answer as a decimal, rounded to 2 decimal digits if necessary.

   Answer: 0.45

3. В треугольной комнате с углами A, B, C установлена непрозрачная перегородка CO (от пола до потолка) так, что из угла B видна ровно треть стены AC, а из угла A – ровно четверть стены BC. Игорь хочет установить в комнате умную колонку «VK Капсула» с Марусей так, чтобы любая прямая, параллельная полу комнаты и проходящая через колонку, пересекала либо перегородку CO, либо стену AB. Стены комнаты и перегородка перпендикулярны полу и имеют форму прямоугольников, колонку можно считать точечным объектом.
Какая часть площади комнаты подходит Игорю для установки колонки? Запишите ответ в виде десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.

   In a triangular room with corners A, B, C, a new opaque wall CO (from the floor to the ceiling) is installed in such way that exactly a third of the wall AC is visible from the corner B, and exactly a quarter of the BC wall is visible from the corner A. Igor wants to install a smart speaker «VK Capsule» with Marusya in the room so that any straight line parallel to the floor of the room and passing through the speaker will intersect either the wall CO or the wall AB. The walls of the room are perpendicular to the floor and have the shape of rectangles; the smart speaker can be considered a point object.
What part of the room area is suitable for installing the speaker in the way Igor wants? Write your answer as a decimal, rounded to 2 decimal digits if necessary.

   Answer: 0.58

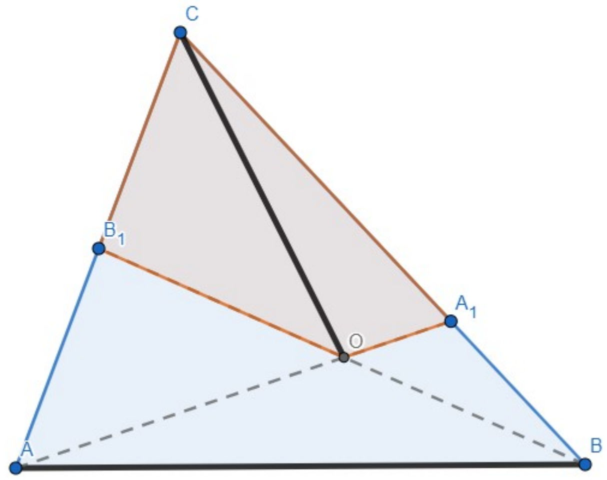
4. В треугольной комнате с углами A, B, C установлена непрозрачная перегородка CO (от пола до потолка) так, что из угла B видна ровно треть стены AC, а из угла A – ровно одна пятая часть стены BC. Игорь хочет установить в комнате умную колонку «VK Капсула» с Марусей так, чтобы любая прямая, параллельная полу комнаты и проходящая через колонку, пересекала либо перегородку CO, либо стену AB. Стены комнаты и перегородка перпендикулярны полу и имеют форму прямоугольников, колонку можно считать точечным объектом.
Какая часть площади комнаты подходит Игорю для установки колонки? Запишите ответ в виде десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.

   In a triangular room with corners A, B, C, a new opaque wall CO (from the floor to the ceiling) is installed in such way that exactly a third of the wall AC is visible from the corner B, and exactly a fifth of the BC wall is visible from the corner A. Igor wants to install a smart speaker «VK Capsule» with Marusya in the room so that any straight line parallel to the floor of the room and passing through the speaker will intersect either the wall CO or the wall AB. The walls of the room are perpendicular to the floor and have the shape of rectangles; the smart speaker can be considered a point object.

What part of the room area is suitable for installing the speaker in the way Igor wants? Write your answer as a decimal, rounded to 2 decimal digits if necessary.

Answer: 0.61

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Рассмотрим вид сверху: стены комнаты станут сторонами треугольника, а перегородка – отрезком, соединяющим его вершину с одной из внутренних точек. Тогда задачу можно переформулировать следующим образом: найти площадь геометрического места внутренних точек (ГМТ) P треугольника ABC, таких, что любая прямая, проходящая через P, пересекает либо AB, либо CO. Пусть прямые AO, BO пересекают стороны BC, AB треугольника в точках A_1, B_1, соответственно.



Докажем, что искомым ГМТ является четырехугольник CA_1OB_1. Рассмотрим произвольную внутреннюю точку этого четырехугольника; без ограничения общности будем считать ее внутренней точкой треугольника CB_1O. Проведем через P некоторую прямую l и предположим, что она не пересекает CO. Из этого следует, что она пересекает отрезки OB_1, CB_1. Пусть l пересекает B_1C в точке T. Тогда луч TP является внутренним для угла B_1TO, причем луч TO пересекает сторону AB исходного треугольника – а значит, луч TP также пересекает ее. Итак, любая внутренняя точка четырехугольника CA_1OB_1 входит в искомое ГМТ.

Теперь рассмотрим точки вне упомянутого четырехугольника и покажем, что они не обладают требуемым для искомого ГМТ свойством. Для внешних точек треугольника ABC это совсем очевидно (подлходит, например, прямая, проходящая через данную внешнюю точку параллельно одной из сторон $\triangle ABC$), для внутренних точек треугольника AOB – тоже (достаточно провести через данную точку прямую, параллельную AB). Остались два треугольника – AOB_1 и BOA_1. Рассмотрим первый из них (второй рассматривается аналогично). Итак, пусть P – внутренняя точка $\triangle AOB_1$. Проведем прямую PK, где K – произвольная точка отрезка BO, отличная от его концов: такая прямая не пересечет ни CO, ни AB.

Утверждение доказано.

Итак, требуется найти $\frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ABC}}$, причем $\frac{AB_1}{AC} = \frac{1}{2}$, $\frac{BA_1}{BC} = \frac{1}{3}$ по условию. Согласно теореме Менелая, $\frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{A_1B}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, откуда $\frac{AO}{OA_1} = 3 \Rightarrow \frac{AO}{AA_1} = \frac{3}{4}$. Далее

$$\frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ABC}} = \frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ACA_1}} \cdot \frac{S_{ACA_1}}{S_{ABC}} = (1 - \frac{S_{AOB_1}}{S_{ACA_1}}) \cdot \frac{CA_1}{CB} =$$

$$(1 - \frac{AO}{AA_1} \cdot \frac{AB_1}{AC}) \cdot \frac{CA_1}{CB} = (1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}) \frac{2}{3} = \frac{5}{12} \approx 0.42$$

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let's look from the top to the room: its walls AB, BC, CA will become the sides of the triangle, and the wall

CO will become a segment connecting its vertex with one of the internal points. Then the problem can be reformulated as follows: find the area of the locus of the interior points P of the triangle ABC, such that any line passing through P intersects either AB or CO. Let the lines AO, BO intersect the sides BC, AB of the triangle at points A_1, B_1, respectively.

Let us prove that the required locus is the quadrilateral CA_1OB_1. Consider an arbitrary internal point of the quadrilateral; without loss of generality, we will consider it an internal point of the triangle CB_1O. Lets draw some line l through P and assume that it does not intersect CO. Then it intersects the segments OB_1, CB_1. Let l intersect B_1C at point T. Then the ray TP is internal to the angle B_1TO, and the ray TO intersects the side AB of the original triangle – and therefore the ray TP also intersects it. So, any internal point of the quadrilateral CA_1OB_1 is included in the desired locus.
Now let's consider points outside the mentioned quadrilateral and show that they do not have the property required for the desired locus. For external points of triangle ABC this is quite obvious (for example, a straight line passing through a given external point parallel to one of the sides of $\triangle ABC$ is suitable), for internal points of triangle AOB its obvious, too (it is enough to draw a straight line through this point parallel to AB). There are two triangles left – AOB_1 and BOA_1. Let's consider the first of them (the second one is considered similarly). So, let P be the internal point of $\triangle AOB_1$. Lets draw a line PK, where K is an arbitrary point of the segment BO that is different from its ends: such a line will not intersect either CO or AB.
Q.E.D.

So, we need to calculate $\frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ABC}}$ with $\frac{AB_1}{AC} = \frac{1}{2}$, $\frac{BA_1}{BC} = \frac{1}{3}$. Using Menelaus's theorem, we get $\frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{A_1B}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, thus $\frac{AO}{OA_1} = 3 \Rightarrow \frac{AO}{AA_1} = \frac{3}{4}$. Finally,

$$\frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ABC}} = \frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ACA_1}} \cdot \frac{S_{ACA_1}}{S_{ABC}} = \left(1 - \frac{S_{AOB_1}}{S_{ACA_1}}\right) \cdot \frac{CA_1}{CB} =$$

$$\left(1 - \frac{AO}{AA_1} \cdot \frac{AB_1}{AC}\right) \cdot \frac{CA_1}{CB} = \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\right)\frac{2}{3} = \frac{5}{12} \approx 0.42$$

Task 5.

1. Через квадратное поле проходят 18 прямых дорог, которые делят его на 100 прямоугольных участков. Эти участки в шахматном порядке распределены между двумя братьями – Андреем и Борисом, причем все участки на диагонали Андрея оказались квадратными. Верно ли, что совокупная площадь участков Андрея не меньше совокупной площади участков Бориса?

   A square field has 18 of straight roads running through dividing it into 100 rectangular areas. These areas are divided between two brothers – Andrew and Boris – in chessboard order. Each area on Andrew's diagonal turned out to be of square shape. Is it true that total area of Andrew's land is not less than total area of Boris's land?

2. Через квадратное поле проходят 22 прямые дороги, которые делят его на 144 прямоугольных участка. Эти участки в шахматном порядке распределены между двумя братьями – Андреем и Борисом, причем все участки на диагонали Андрея оказались квадратными. Верно ли, что совокупная площадь участков Андрея не меньше совокупной площади участков Бориса?

   A square field has 22 of straight roads running through dividing it into 144 rectangular areas. These areas are divided between two brothers – Andrew and Boris – in chessboard order. Each area on Andrew's diagonal turned out to be of square shape. Is it true that total area of Andrew's land is not less than total area of Boris's land?

3. Через квадратное поле проходят 26 прямых дорог, которые делят его на 196 прямоугольных участков. Эти участки в шахматном порядке распределены между двумя братьями – Андреем и Борисом, причем все участки на диагонали Андрея оказались квадратными. Верно ли, что совокупная площадь участков Андрея не меньше совокупной площади участков Бориса?

   A square field has 26 of straight roads running through dividing it into 196 rectangular areas. These areas are divided between two brothers – Andrew and Boris – in chessboard order. Each area on Andrew's diagonal turned out to be of square shape. Is it true that total area of Andrew's land is not less than total area of Boris's land?

4. Через квадратное поле проходят 14 прямых дорог, которые делят его на 64 прямоугольных участка. Эти участки в шахматном порядке распределены между двумя братьями – Андреем и Борисом, причем все участки на диагонали Андрея оказались квадратными. Верно ли, что совокупная площадь участков Андрея не меньше совокупной площади участков Бориса?

   A square field has 14 of straight roads running through dividing it into 64 rectangular areas. These areas are divided between two brothers – Andrew and Boris – in chessboard order. Each area on Andrew's diagonal turned out to be of square shape. Is it true that total area of Andrew's land is not less than total area of Boris's land?

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Для начала заметим, что разделить прямоугольное поле на 100 прямоугольных участков 18 дорогами можно только проведя по 9 «горизонтальных» (по отношению к определенной заранее выбранной стороне поля) и «вертикальных» дорог. Действительно, пусть m – количество горизонтальных дорог, n – количество вертикальных дорог. Тогда

$$\begin{cases} m+n=18 \\ (m+1)(n+1)=100 \end{cases},$$

откуда $m=n=9$.

Раскрасим поле в два цвета (пусть участки Андрея будут чёрными, а участки Бориса – белыми) и пронумеруем полосы участков (между параллельными дорогами) по горизонтали и повертикали числами от 1 до 10. Сразу заметим, что совокупная площадь дорог постоянна и зависит только от их количества – а значит, не влияет на соотношение площадей белых и чёрных участков.

Чёрные участки бывают двух типов: одни стоят на пересечении полос с четными номерами, другие – на пересечении полос с нечётными номерами. Выкидывая сначала чётные горизонтали, потом чётные вертикали, получим чёрный квадрат (т.к. диагональные участки Андрея – квадратные согласно условию) со стороной a. Аналогичным образом выкидывая нечётные полосы, получим чёрный квадрат со стороной b. Итак, «чёрная» (т.е. принадлежащая Андрею) площадь равна a^2+b^2. Тогда «белая» площадь равна $(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$. Покажем, что «черная» площадь не меньше «белой»:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab,$$

что завершает решение задачи.

Критерии оценивания:

- участник выяснил количество «горизонтальных» и «вертикальных» дорог – 1 балл;
- получены верные выражения для сумм площадей участков Андрея и Бориса – 3 балла;
- доказано неравенство между полученными выражениями – 1 балл.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Note that dividing a rectangular field into 100 rectangular sections with 18 roads can only be done by drawing 9 «horizontal» (relative to a certain pre-selected side of the field) and «vertical» roads. Indeed, let m be the number of horizontal roads, and n be the number of vertical ones. Then

$$\begin{cases} m+n=18 \\ (m+1)(n+1)=100 \end{cases},$$

thus $m=n=9$.

Let's paint the field in two colors (let Andrew's areas be black and Boris's areas be white) and number the rows and columns of areas (between parallel roads) with numbers from 1 to 10. Let's also note that total area of the roads is constant and depends only on their quantity, and therefore does not affect the ratio of the areas of white and black areas.

There are two types of black areas: some are at the intersection of even-numbered rows and columns, others are at the intersection of odd-numbered ones. Throwing out first the even rows, then the even columns, we get a black square (since Andrew's diagonal areas are squares) with side a. Similarly, throwing out odd rows and columns, we get a black square with side b. So, the "black" area (i.e., belonging to Andrew) is equal to $a^2 + b^2$. Then the «white» area is equal to $(a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab$. Lets show that the «black» area is not less than the «white»:

$$(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

which completes the solution.

Criteria:

- the participant found out the number of «horizontal» and «vertical» roads – 1 point;
- the correct expressions were obtained for the sums of the areas owned by Andrew and Boris – 3 points;
- the inequality between the obtained sums is proven – 1 point.

Task 6.

1. Искусственный интеллект справляется еще не со всеми задачами в словах. Вот непридуманная история: некоторой системе искусственного интеллекта было предложено найти максимальное значение отношения $\frac{a\cdot b\cdot c}{a+b+c}$, где $\overline{abc}$ – трехзначное число в десятичной записи. Система «рассудила» так:
чтобы отношение $\frac{x}{y}$ имело максимальное значение, надо чтобы x получил максимальное из возможных значений, а y – минимальное из возможных значений. Так как x – это произведение десятичных цифр трехзначного числа, то $x = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$; так как y – это сумма десятичных цифр трехзначного числа, то $y = 1 + 0 + 0 = 1$. Поэтому искомое максимальное значение равно $\frac{7291}{1} = 729$.
Разумеется, ответ неправильный. Предлагаем вам решить следующую, чуть более сложную задачу:

   Для каждого четырехзначного числа $\overline{abcd}$ (a, b, c, d – цифры от 0 до 9, причем $a \neq 0$) подсчитали значение отношения $\frac{a\cdot b\cdot c\cdot d}{a+b+c+d}$, а затем отсортировали все четырехзначные числа сначала в порядке возрастания значений этого отношения, а затем (в случае равных значений указанных отношений) – в порядке возрастания самих четырехзначных чисел. Таким образом, например, число 2000 при такой сортировке предшествует числу 1111 (так как $\frac{2\cdot 0\cdot 0\cdot 0}{2+0+0+0} < \frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 1}{1+1+1+1}$), а число 1000 предшествует числу 2000 (так как $\frac{1\cdot 0\cdot 0\cdot 0}{1+0+0+0} = \frac{2\cdot 0\cdot 0\cdot 0}{2+0+0+0}$, но $1000 < 2000$).
Какое число находится в полученной последовательности на 8989 месте?

   Artificial intelligence does not yet deal with all tasks «in words». Here is a true story: some artificial intelligence system was asked to find the maximum value of the ratio $\frac{a\cdot b\cdot c}{a+b+c}$, where $\overline{abc}$ is a three-digit number in decimal notation. The system «reasoned» like this:
for the ratio $\frac{x}{y}$ to have a maximum value, x must have the maximum possible value, and y must have the minimum possible value. Since x is the product of decimal digits of a three-digit number, then $x = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$; since y is the sum of decimal digits of a three-digit number, then $y = 1 + 0 + 0 = 1$. Therefore, the required maximum value is $\frac{7291}{1} = 729$.
Of course, the answer is wrong. We ask you to solve slightly more difficult problem:

For each four-digit decimal number $\overline{abcd}$ ($a \neq 0$) we calculated the value of the ratio $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{a+b+c+d}$, and then sorted all four-digit numbers, first in ascending order of the values of this ratio, and then (in the case of equal values of the ratios) – in ascending order of the four-digit numbers themselves. Thus, for example, the number 2000 after this sorting precedes the number 1111 (since $\frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0} < \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1+1+1+1}$), and the number 1000 precedes the number 2000 (since $\frac{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{1+0+0+0} = \frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0}$, but $1000 < 2000$).
What number is in the 8989nd place in the resulting sequence?

Answer: 9997

2. Искусственный интеллект справляется еще не со всеми задачами в словах. Вот непридуманная история: некоторой системе искусственного интеллекта было предложено найти максимальное значение отношения $\frac{a \cdot b \cdot c}{a+b+c}$, где $\overline{abc}$ – трехзначное число в десятичной записи. Система «рассудила» так:
чтобы отношение $\frac{x}{y}$ имело максимальное значение, надо чтобы x получил максимальное из возможных значений, а y – минимальное из возможных значений. Так как x – это произведение десятичных цифр трехзначного числа, то $x = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$; так как y – это сумма десятичных цифр трехзначного числа, то $y = 1 + 0 + 0 = 1$. Поэтому искомое максимальное значение равно $\frac{7291}{1} = 729$.
Разумеется, ответ неправильный. Предлагаем вам решить следующую, чуть более сложную задачу:

Для каждого четырехзначного числа $\overline{abcd}$ (a, b, c, d – цифры от 0 до 9, причем $a \neq 0$) подсчитали значение отношения $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{a+b+c+d}$, а затем отсортировали все четырехзначные числа сначала в порядке возрастания значений этого отношения, а затем (в случае равных значений указанных отношений) – в порядке возрастания самих четырехзначных чисел. Таким образом, например, число 2000 при такой сортировке предшествует числу 1111 (так как $\frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0} < \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1+1+1+1}$), а число 1000 предшествует числу 2000 (так как $\frac{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{1+0+0+0} = \frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0}$, но $1000 < 2000$).
Какое число находится в полученной последовательности на 8987 месте?

Artificial intelligence does not yet deal with all tasks «in words». Here is a true story: some artificial intelligence system was asked to find the maximum value of the ratio $\frac{a \cdot b \cdot c}{a+b+c}$, where $\overline{abc}$ is a three-digit number in decimal notation. The system «reasoned» like this:
for the ratio $\frac{x}{y}$ to have a maximum value, x must have the maximum possible value, and y must have the minimum possible value. Since x is the product of decimal digits of a three-digit number, then $x = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$; since y is the sum of decimal digits of a three-digit number, then $y = 1 + 0 + 0 = 1$. Therefore, the required maximum value is $\frac{7291}{1} = 729$.
Of course, the answer is wrong. We ask you to solve slightly more difficult problem:

For each four-digit decimal number $\overline{abcd}$ ($a \neq 0$) we calculated the value of the ratio $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{a+b+c+d}$, and then sorted all four-digit numbers, first in ascending order of the values of this ratio, and then (in the case of equal values of the ratios) – in ascending order of the four-digit numbers themselves. Thus, for example, the number 2000 after this sorting precedes the number 1111 (since $\frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0} < \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1+1+1+1}$), and the number 1000 precedes the number 2000 (since $\frac{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{1+0+0+0} = \frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0}$, but $1000 < 2000$).
What number is in the 8987rd place in the resulting sequence?

Answer: 9799

3. Искусственный интеллект справляется еще не со всеми задачами в словах. Вот непридуманная история: некоторой системе искусственного интеллекта было предложено найти максимальное значение отношения $\frac{a \cdot b \cdot c}{a+b+c}$, где $\overline{abc}$ – трехзначное число в десятичной записи. Система «рассудила» так:
чтобы отношение $\frac{x}{y}$ имело максимальное значение, надо чтобы x получил максимальное из

возможных значений, а y – минимальное из возможных значений. Так как x – это произведение десятичных цифр трехзначного числа, то $x = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$; так как y – это сумма десятичных цифр трехзначного числа, то $y = 1 + 0 + 0 = 1$. Поэтому искомое максимальное значение равно $\frac{7291}{1} = 729$.
Разумеется, ответ неправильный. Предлагаем вам решить следующую, чуть более сложную задачу:

Для каждого четырехзначного числа $\overline{abcd}$ (a, b, c, d – цифры от 0 до 9, причем $a \neq 0$) подсчитали значение отношения $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{a+b+c+d}$, а затем отсортировали все четырехзначные числа сначала в порядке возрастания значений этого отношения, а затем (в случае равных значений указанных отношений) – в порядке возрастания самих четырехзначных чисел. Таким образом, например, число 2000 при такой сортировке предшествует числу 1111 (так как $\frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0} < \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1+1+1+1}$), а число 1000 предшествует числу 2000 (так как $\frac{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{1+0+0+0} = \frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0}$, но $1000 < 2000$).
Какое число находится в полученной последовательности на 8990 месте?

Artificial intelligence does not yet deal with all tasks «in words». Here is a true story: some artificial intelligence system was asked to find the maximum value of the ratio $\frac{a \cdot b \cdot c}{a+b+c}$, where $\overline{abc}$ is a three-digit number in decimal notation. The system «reasoned» like this:
for the ratio $\frac{x}{y}$ to have a maximum value, x must have the maximum possible value, and y must have the minimum possible value. Since x is the product of decimal digits of a three-digit number, then $x = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$; since y is the sum of decimal digits of a three-digit number, then $y = 1 + 0 + 0 = 1$. Therefore, the required maximum value is $\frac{7291}{1} = 729$.
Of course, the answer is wrong. We ask you to solve slightly more difficult problem:

For each four-digit decimal number $\overline{abcd}$ ($a \neq 0$) we calculated the value of the ratio $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{a+b+c+d}$, and then sorted all four-digit numbers, first in ascending order of the values of this ratio, and then (in the case of equal values of the ratios) – in ascending order of the four-digit numbers themselves. Thus, for example, the number 2000 after this sorting precedes the number 1111 (since $\frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0} < \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1+1+1+1}$), and the number 1000 precedes the number 2000 (since $\frac{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{1+0+0+0} = \frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0}$, but $1000 < 2000$).
What number is in the 8990th place in the resulting sequence?

Answer: 8899

4. Искусственный интеллект справляется еще не со всеми задачами в словах. Вот непридуманная история: некоторой системе искусственного интеллекта было предложено найти максимальное значение отношения $\frac{a \cdot b \cdot c}{a+b+c}$, где $\overline{abc}$ – трехзначное число в десятичной записи. Система «рассудила» так:
чтобы отношение $\frac{x}{y}$ имело максимальное значение, надо чтобы x получил максимальное из возможных значений, а y – минимальное из возможных значений. Так как x – это произведение десятичных цифр трехзначного числа, то $x = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$; так как y – это сумма десятичных цифр трехзначного числа, то $y = 1 + 0 + 0 = 1$. Поэтому искомое максимальное значение равно $\frac{7291}{1} = 729$.
Разумеется, ответ неправильный. Предлагаем вам решить следующую, чуть более сложную задачу:

Для каждого четырехзначного числа $\overline{abcd}$ (a, b, c, d – цифры от 0 до 9, причем $a \neq 0$) подсчитали значение отношения $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{a+b+c+d}$, а затем отсортировали все четырехзначные числа сначала в порядке возрастания значений этого отношения, а затем (в случае равных значений указанных отношений) – в порядке возрастания самих четырехзначных чисел. Таким образом, например, число 2000 при такой сортировке предшествует числу 1111 (так как $\frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0} < \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1+1+1+1}$), а число 1000 предшествует числу 2000 (так как $\frac{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{1+0+0+0} = \frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0}$, но $1000 < 2000$).

Какое число находится в полученной последовательности на 8992 месте?

Artificial intelligence does not yet deal with all tasks «in words». Here is a true story: some artificial intelligence system was asked to find the maximum value of the ratio $\frac{a\cdot b\cdot c}{a+b+c}$, where $\overline{abc}$ is a three-digit number in decimal notation. The system «reasoned» like this:
for the ratio $\frac{x}{y}$ to have a maximum value, x must have the maximum possible value, and y must have the minimum possible value. Since x is the product of decimal digits of a three-digit number, then $x = 9\cdot 9\cdot 9 = 729$; since y is the sum of decimal digits of a three-digit number, then $y = 1+0+0 = 1$. Therefore, the required maximum value is $\frac{7291}{1} = 729$.
Of course, the answer is wrong. We ask you to solve slightly more difficult problem:

For each four-digit decimal number $\overline{abcd}$ ($a \neq 0$) we calculated the value of the ratio $\frac{a\cdot b\cdot c\cdot d}{a+b+c+d}$, and then sorted all four-digit numbers, first in ascending order of the values of this ratio, and then (in the case of equal values of the ratios) – in ascending order of the four-digit numbers themselves. Thus, for example, the number 2000 after this sorting precedes the number 1111 (since $\frac{2\cdot 0\cdot 0\cdot 0}{2+0+0+0} < \frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 1}{1+1+1+1}$), and the number 1000 precedes the number 2000 (since $\frac{1\cdot 0\cdot 0\cdot 0}{1+0+0+0} = \frac{2\cdot 0\cdot 0\cdot 0}{2+0+0+0}$, but $1000 < 2000$).
What number is in the 8992nd place in the resulting sequence?

Answer: 8998

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Сначала докажем, что отношение $\frac{a\cdot b\cdot c\cdot d}{a+b+c+d}$ не убывает при возрастании любой цифры этого числа, не равной 9. Пусть $0 \le t \le 8$ – любая цифра числа $\overline{abcd}$, x, y – соответственно произведение и сумма остальных цифр этого числа.

$$xy \ge 0 \Rightarrow xyt + xt^2 + xt + xy \ge xyt + xt^2 + xt \Rightarrow x(t+1)(t+y) \ge (y+(t+1))xt \Rightarrow$$

$$\frac{x(t+1)}{y+(t+1)} \ge \frac{xt}{y+t},$$

то есть при увеличении t на единицу отношение произведения цифр к их сумме не убывает, что и требовалось доказать.
Следовательно, четырехзначные десятичные числа $\overline{abcd}$, во-первых, упорядочены по сумме цифр. Требуется найти 8989-й член последовательности, в которой 9000 членов (1000, 1001, ..., 9999 – ровно $9999 - 1000 + 1 = 9000$) – иными словами, нужен 12-й член «с конца». Максимальная сумма цифр – 36, и есть только одно четырехзначное число с такой суммой цифр – это 9999, а значит, это и есть последнее число в нашей последовательности. Есть четыре четырехзначных числа с суммой цифр, равной 35 (9998, 9989, 9899 и 8999), они и будут вторым, третьим, четвертым и пятым числами «с конца» в нашей последовательности.
Четырехзначные числа с суммой цифр 34 можно разбить на две группы: те, которые образованы цифрами 9, 9, 8, 8, и те, которые образованы цифрами 9, 9, 9, 7. Числа внутри каждой из этих групп упорядочены по возрастанию, при этом все числа первой группы расположены ближе к концу последовательности, чем числа из второй группы, т.к. $\frac{9\cdot 9\cdot 8\cdot 8}{9+9+8+8} > \frac{9\cdot 9\cdot 9\cdot 7}{9+9+9+7}$. Значит, следующие шесть (именно столькими способами можно составить число из цифр 9,9,8,8) чисел с конца последовательности – это 9988, 9898, 9889, 8998, 8989, 8899; за ними следуют 9997, 9979, 9799, 7999.

Критерии оценивания:

- отмечено неубывание отношения произведения цифр к их сумме – 2 балла;
- доказано неубывание отношения произведения цифр к их сумме, при этом отмечено, что это верно только если все цифры меньше 9 – 1 балл;
- верно выполнен перебор «с конца» последовательности – 2 балла;

- допущена ошибка при переборе, приведшая к неверному ответу – минус 1 балл.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* First, lets prove that the ratio $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{a+b+c+d}$ does not decrease as any digit of this number (that is not equal to 9) increases. Let $0 \leq t \leq 8$ be any digit of the number $\overline{abcd}$, x, y be the product and sum of the remaining digits of this number, respectively.

$$xy \geq 0 \Rightarrow xyt + xt^2 + xt + xy \geq xyt + xt^2 + xt \Rightarrow x(t+1)(t+y) \geq (y + (t+1))xt \Rightarrow$$

$$\frac{x(t+1)}{y+(t+1)} \geq \frac{xt}{y+t},$$

thus when t increases by one, the ratio of the product of digits to their sum does not decrease, which is what was to be proven.
Therefore, four-digit decimal numbers $\overline{abcd}$ are firstly ordered by the sum of their digits. We need to find the 8989th term of a sequence which has 9000 terms (1000, 1001, ..., 9999 - exactly $9999-1000+1 = 9000$) – in other words, we need the 12th term «from the end» . The maximum sum of digits is 36, and there is only one four-digit number with such a sum of digits – it's 9999, which means that this is the last number in our sequence. There are four four-digit numbers with a sum of digits equal to 35 (9998, 9989, 9899 and 8999), and these will be the second, third, fourth and fifth numbers «from the end» in our sequence.
Four-digit numbers with a sum of digits of 34 can be divided into two groups: those formed by the digits 9, 9, 8, 8, and those formed by the digits 9, 9, 9, 7. The numbers within each of these groups are ordered in ascending order, with all the numbers of the first group located closer to the end of the sequence than the numbers from the second group, since $\frac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 8}{9+9+8+8} > \frac{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 7}{9+9+9+7}$. By that, the next six (that's how many ways there are to make a number from the digits 9,9,8,8) numbers from the end of the sequence are 9988, 9898, 9889, 8998, 8989, 8899; followed by 9997, 9979, 9799, 7999.

Criteria:

- the ratio of the product of digits to their sum has been noticed to be non-decreasing – 2 points;
- the ratio of the product of digits to their sum has been proven to be non-decreasing, also noticed that its true if all the digits are less than 9 – 1 point;
- correctly searched «from the end» of the sequence – 2 points;
- an error was made during the search, which led to an incorrect answer – minus 1 point.