8-9th degree

Task 1.

1. Сеть автобусных маршрутов города Иннополиса устроена так:

   - общее количество автобусных остановок в городе – 9 штук, и любые две из них соединены дорогой;
   - на каждом маршруте должны быть ровно 3 остановки (включая начало и конец маршрута);
   - любые два автобусных маршрута имеют либо одну общую остановку, либо ни одной.

   Какое наибольшее количество автобусных маршрутов может иметь город Иннополис?

   The bus routes web in the town of Innopolis is built as follows:

   - the total number of bus stops in the town is 9 with any two of them connected with a road;
   - each route must have exactly 3 stops (including the beginning and end of the route);
   - any two bus routes have either one common stop or none.

   What is the largest number of bus routes the town of Innopolis can have?

   Answer: 12

2. Сеть автобусных маршрутов города Иннополиса устроена так:

   - общее количество автобусных остановок в городе – 9 штук, и любые две из них соединены дорогой;
   - на каждом маршруте должны быть ровно 4 остановки (включая начало и конец маршрута);
   - любые два автобусных маршрута имеют либо одну общую остановку, либо ни одной.

   Какое наибольшее количество автобусных маршрутов может иметь город Иннополис?

   The bus routes web in the town of Innopolis is built as follows:

   - the total number of bus stops in the town is 9 with any two of them connected with a road;
   - each route must have exactly 4 stops (including the beginning and end of the route);
   - any two bus routes have either one common stop or none.

   What is the largest number of bus routes the town of Innopolis can have?

   Answer: 3

3. Сеть автобусных маршрутов города Иннополиса устроена так:

   - общее количество автобусных остановок в городе – 10 штук, и любые две из них соединены дорогой;
   - на каждом маршруте должны быть ровно 3 остановки (включая начало и конец маршрута);
   - любые два автобусных маршрута имеют либо одну общую остановку, либо ни одной.

Какое наибольшее количество автобусных маршрутов может иметь город Иннополис?

The bus routes web in the town of Innopolis is built as follows:

- the total number of bus stops in the town is 10 with any two of them connected with a road;
- each route must have exactly 3 stops (including the beginning and end of the route);
- any two bus routes have either one common stop or none.

What is the largest number of bus routes the town of Innopolis can have?

Answer: 13

4. Сеть автобусных маршрутов города Иннополиса устроена так:

- общее количество автобусных остановок в городе – 12 штук, и любые две из них соединены дорогой;
- на каждом маршруте должны быть ровно 4 остановки (включая начало и конец маршрута);
- любые два автобусных маршрута имеют либо одну общую остановку, либо ни одной.

Какое наибольшее количество автобусных маршрутов может иметь город Иннополис?

The bus routes web in the town of Innopolis is built as follows:

- the total number of bus stops in the town is 12 with any two of them connected with a road;
- each route must have exactly 4 stops (including the beginning and end of the route);
- any two bus routes have either one common stop or none.

What is the largest number of bus routes the town of Innopolis can have?

Answer: 9

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* «Зафиксируем» автобусную остановку X – одну из 9-и. Кроме нее, в городе есть еще 8 остановок, и на каждом автобусном маршруте, проходящем через X, есть еще 2 остановки, причем эти маршруты не могут иметь других общих остановок, кроме X – значит, таких маршрутов не более $8 : 2 = 4$.

Теперь занумеруем автобусные остановки числами от 1 до 9. Пусть в Иннополисе всего n автобусных маршрутов, из них n_1 проходят через остановку 1, n_2 – через остановку 2, и т.д. На каждом маршруте 3 остановки – значит, $n_1 + n_2 + \cdots + n_9 = 3n$, при этом $n_i \leq 4$ для любого i согласно доказанному выше. Следовательно, $3n \leq 4 \cdot 9$, откуда $n \leq 12$.

Покажем, как провести 12 маршрутов (цифры обозначают номера остановок, а трехзначные числа – автобусные маршруты): 123, 456, 789, 147, 258, 369, 249, 168, 267, 348, 159, 357.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Lets «fix» bus stop X – one of the 9. In addition to it, there are 8 more bus stops in the city, and on each bus route passing through X, there are 2 more stops, and these routes cannot have other stops in common except X – therefore, there are no more than $8 : 2 = 4$ such routes.

Now let's enumerate the bus stops with numbers from 1 to 9. Let there be only n bus routes in Innopolis, of which n_1 go through stop 1, n_2 go through stop 2, etc. There are 3 stops on each route – by that, $n_1 + n_2 + \cdots + n_9 = 3n$, while $n_i \leq 4$ for any i according to what was proven above. Therefore, $3n \leq 4 \cdot 9$, thus $n \leq 12$.

Finally, lets show how to establish the 12 routes (digits indicate bus stops, and three-digit numbers indicate bus routes): 123, 456, 789, 147, 258, 369, 249, 168, 267, 348, 159, 357.

Task 2.

1. Дано число $n = 2^5 \cdot 13^7$. Найдите количество натуральных делителей n^2, не являющихся делителями n.

   Given $n = 2^5 \cdot 13^7$. Find the number of positive integer divisors of n^2 that are not divisors of n.

   Answer: 117

2. Дано число $n = 5^9 \cdot 13^8$. Найдите количество натуральных делителей n^2, не являющихся делителями n.

   Given $n = 5^9 \cdot 13^8$. Find the number of positive integer divisors of n^2 that are not divisors of n.

   Answer: 233

3. Дано число $n = 7^6 \cdot 17^{11}$. Найдите количество натуральных делителей n^2, не являющихся делителями n.

   Given $n = 7^6 \cdot 17^{11}$. Find the number of positive integer divisors of n^2 that are not divisors of n.

   Answer: 215

4. Дано число $n = 3^7 \cdot 7^{10}$. Найдите количество натуральных делителей n^2, не являющихся делителями n.

   Given $n = 3^7 \cdot 7^{10}$. Find the number of positive integer divisors of n^2 that are not divisors of n.

   Answer: 227

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть дано число $N = a^x \cdot b^y$ для натуральных x, y и различных простых a, b. Докажем, что N имеет ровно $(x+1)(y+1)$ натуральных делителей.

Для начала заметим, что любой делитель d числа N имеет вид $d = a^u \cdot b^v$ для целых неотрицательных $u \leq x$, $v \leq y$. Действительно, других простых делителей d иметь не может, а степени вхождения в него простых a, b ограничены таковыми у N. Более того, каждая пара u, v взаимооднозначно определяет d – а значит, количество таких пар равно количеству делителей числа N. Т.н. «правило умножения» подсказывает, что количество таких пар равно $(x+1)(y+1)$, что и требовалось доказать.

Теперь заметим, что любой делитель n является делителем n^2 – значит, искомое количество равно разности количеств делителей n^2 и n, т.е. $(2 \cdot 5 + 1)(2 \cdot 7 + 1) - (5+1)(7+1) = 117$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Consider a number $N = a^x \cdot b^y$ for positive integers x, y and primes a, b $(a \neq b)$. Lets prove that N has exactly $(x+1)(y+1)$ positive integer divisors.

Note that any divisor d of a number N has the form $d = a^u \cdot b^v$ for non-negative integers $u \leq x$, $v \leq y$. Indeed, d cannot have any other prime divisors, and the degrees of occurrence of primes a, b in it are limited to those of N. Moreover, each pair u, v determines d one-to-one, which means the number of such pairs is equal to the number of divisors of the number N. The so-called «multiplication rule» states that the number of such pairs is equal to $(x + 1)(y + 1)$, which is what needed to be proven.

Note that any divisor n is a divisor of n^2 – by that, the required quantity is equal to the difference between the numbers of divisors of n^2 and such for n, i.e. $(2 \cdot 5 + 1)(2 \cdot 7 + 1) - (5 + 1)(7 + 1) = 117$.

Task 3.

1. На клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 1, нарисован треугольник так, что его стороны с длинами 5 и 12 лежат на сторонах клеток. Через сколько вершин клеток пройдет биссектриса наименьшего угла этого треугольника? Помните, что вершина угла, из которого проведена биссектриса, тоже является ее частью.

   On checkered paper with the side of the cell equal to 1, a triangle is drawn in such way that its legs with lengths 5 and 12 lie on the sides of the cells. How many cell vertices will the bisector of the smallest angle of this triangle intersect? Remember that the vertex of the angle which the bisector is drawn from is also part of it.

   Answer: 3

2. На клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 0.2, нарисован треугольник так, что его стороны с длинами 5 и 12 лежат на сторонах клеток. Через сколько вершин клеток пройдет биссектриса наименьшего угла этого треугольника? Помните, что вершина угла, из которого проведена биссектриса, тоже является ее частью.

   On checkered paper with the side of the cell equal to 0.2, a triangle is drawn in such way that its legs with lengths 5 and 12 lie on the sides of the cells. How many cell vertices will the bisector of the smallest angle of this triangle intersect? Remember that the vertex of the angle which the bisector is drawn from is also part of it.

   Answer: 13

3. На клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 1, нарисован треугольник так, что его стороны с длинами 20 и 21 лежат на сторонах клеток. Через сколько вершин клеток пройдет биссектриса наименьшего угла этого треугольника? Помните, что вершина угла, из которого проведена биссектриса, тоже является ее частью.

   On checkered paper with the side of the cell equal to 1, a triangle is drawn in such way that its legs with lengths 20 and 21 lie on the sides of the cells. How many cell vertices will the bisector of the smallest angle of this triangle intersect? Remember that the vertex of the angle which the bisector is drawn from is also part of it.

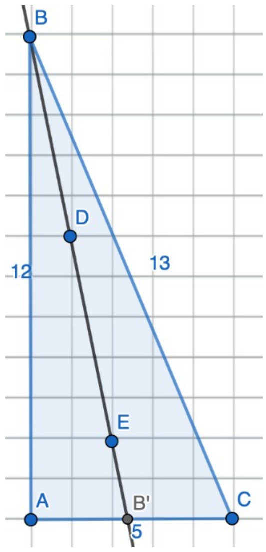
   Answer: 5

4. На клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 0.5, нарисован треугольник так, что его стороны с длинами 7 и 24 лежат на сторонах клеток. Через сколько вершин клеток пройдет биссектриса наименьшего угла этого треугольника? Помните, что вершина угла, из которого проведена биссектриса, тоже является ее частью.

On checkered paper with the side of the cell equal to 0.5, a triangle is drawn in such way that its legs with lengths 7 and 24 lie on the sides of the cells. How many cell vertices will the bisector of the smallest angle of this triangle intersect? Remember that the vertex of the angle which the bisector is drawn from is also part of it.

Answer: 7

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Наименьшим является угол напротив меньшего катета $AC = 5$ (см. рис.). Находим гипотенузу $BC = 13$ по катетам и, используя свойство биссектрисы угла треугольника о делении ею противоположной стороны, находим отношение отрезков, на которые она делит AC: $\frac{AB'}{B'C} = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{13}$.

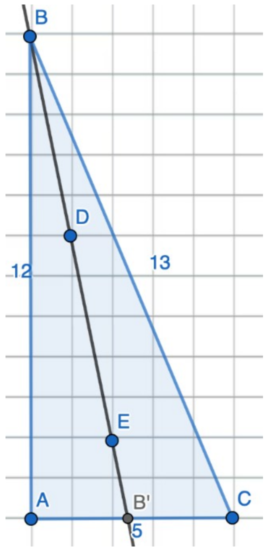


Зная AC и используя найденное отношение, найдем $AB' = AC \cdot \frac{AB}{AB+BC} = 2.4$. Найдем тангенс половины меньшего угла треугольника, прилежащего к катету:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{2.4}{12} = \frac{1}{5}$$

Получим, что каждую клетку «вниз» от точки B (см. рис.) биссектриса будет пересекать клетку в узле. Значит, количество узлов сетки, которые пересекает биссектриса, равно $\left[\frac{12}{5}\right] + 1 = 3$ (здесь $[t]$ обозначает целую часть t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t).

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* The smallest angle is the angle opposite the smaller side $AC = 5$ (see picture). We find the hypotenuse $BC = 13$ by the cathetes, then we use the property of the angle bisector we find the ratio of the segments into which it divides the side $\frac{AB'}{B'C} = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{13}$.



Knowing AC and the ratio of the segments, we find $AB' = AC \cdot \frac{AB}{AB+BC} = 2.4$. Lets calculate the tangent of the half of the smaller angle of the triangle:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{2.4}{12} = \frac{1}{5}$$

We get that every cell «down» (see the triangle's orientation on the picture) from the point B the bisector will intersect a cell at a node. So, the number of nodes of the grid that the bisector intersects is equal to $\left[\frac{12}{5}\right] + 1 = 3$ (here $[t]$ denotes the integer part of t, i.e. the largest integer not exceeding t).

Task 4.

1. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

   - восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
   - восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
   - ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
   - восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

   Изначально были проблемы с 10 аккаунтами пользователей, и 15 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. За какое минимальное время (в минутах) Игорь сможет добиться этого?

   Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

   - restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
   - restore two accounts – then a new question from the user will appear;
   - answer one user question – then two new questions will appear;
   - restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

Initially, there were problems with 10 user accounts, and 15 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. In what minimum amount of time (in minutes) can Igor achieve this?

Answer: 24

2. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

   - восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
   - восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
   - ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
   - восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

   Изначально были проблемы с 14 аккаунтами пользователей, и 15 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. За какое минимальное время (в минутах) Игорь сможет добиться этого?

   Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

   - restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
   - restore two accounts – then a new question from the user will appear;
   - answer one user question – then two new questions will appear;
   - restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

   Initially, there were problems with 14 user accounts, and 15 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. In what minimum amount of time (in minutes) can Igor achieve this?

   Answer: 28

3. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

   - восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
   - восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
   - ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
   - восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

Изначально были проблемы с 12 аккаунтами пользователей, и 18 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. За какое минимальное время (в минутах) Игорь сможет добиться этого?

Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

- restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
- restore two accounts – then a new question from the user will appear;
- answer one user question – then two new questions will appear;
- restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

Initially, there were problems with 12 user accounts, and 18 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. In what minimum amount of time (in minutes) can Igor achieve this?

Answer: 29

4. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

- восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
- восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
- ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
- восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

Изначально были проблемы с 15 аккаунтами пользователей, и 10 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. За какое минимальное время (в минутах) Игорь сможет добиться этого?

Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

- restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
- restore two accounts – then a new question from the user will appear;
- answer one user question – then two new questions will appear;
- restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

Initially, there were problems with 15 user accounts, and 10 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. In what minimum amount of time (in minutes) can Igor achieve this?

Answer: 23

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть есть m «сломанных» аккаунтов и n вопросов пользователей – сопоставим паре (m, n) точку с соответствующими координатами на плоскости. Тогда действиям Игоря (и описанным в условии последствиям этих действий) поставим в соответствие векторы:

- вектор $\overrightarrow{a} = (0, 0)$: «восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же)»;
- вектор $\overrightarrow{b} = (-2, 1)$: «восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя»;
- вектор $\overrightarrow{c} = (0, 1)$: «ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса»;
- вектор $\overrightarrow{d} = (0, -1)$: «восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же)».

Т.е. выполнить действие – значит переместиться вдоль соответствующего вектора, при этом не нарушая условия неотрицательности координат его концов (кол-ва аккаунтов и вопросов – целые неотрицательные числа). Цель – попасть в точку $(0, 0)$ – это будет означать, что не осталось проблем с аккаунтами и вопросами пользователей.

Сразу заметим, что действия, соответствующие векторам $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{c}$, не приводят к приближению к $(0, 0)$, кроме случаев, когда эти действия выполняются из точек $(1, 0)$ и $(0, 1)$, соответственно. Иными словами, из этих действий Игорю пригодится не более одного, причем если и пригодится, то только 1 раз – в самую последнюю минуту.
Чтобы переместиться в точку $(0, 0)$ действиями, соответствующими векторам $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{d}$, нужно находиться в точках $(2, 0)$ и $(1, 1)$, соответственно.

Итак, при помощи векторов $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{d}$ необходимо переместиться из точки $(10, 15)$ в точку $(2, 0)$, либо $(1, 1)$, либо $(1, 0)$, либо $(0, 1)$ за минимальное количество «шагов», после чего потребуется еще один шаг для перемещения в $(0, 0)$.

Рассмотрим случай перемещения в $(2, 0)$: пусть для этого потребовалось x векторов $\overrightarrow{b}$ и y векторов $\overrightarrow{d}$, т.е. $x \cdot \overrightarrow{b} + y \cdot \overrightarrow{d} = (-8, -15)$, или

$$\begin{cases} -2x + 0y = -8 \\ 1x - 1y = -15 \end{cases},$$

откуда $x = 4$, $y = 19$, т.е. всего Игорю потребуется $4 + 19 + 1 = 24$ действия. Аналогичным образом рассмотрев точки $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, получим, что найденные 24 действия – самый быстрый из возможных способов.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let there be m «broken» accounts and n user questions – match the (m, n) pair to a point with the corresponding coordinates on the plane. Then we will associate Igor's actions (and the consequences of these actions described in the task's formulation) with the following vectors:

- vector $\overrightarrow{a} = (0, 0)$: «restore one account, but then another account will break (possibly the restored one)»;

- vector $\overrightarrow{b} = (-2, 1)$: «restore two accounts – then a new question from the user will appear»;
- vector $\overrightarrow{c} = (0, 1)$: «answer one user question – then two new questions will appear»;
- vector $\overrightarrow{d} = (0, -1)$: «restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break».

To perform an action means to move along the corresponding vector, without violating the condition of non-negativity of the coordinates of its ends (the number of accounts and questions are non-negative integers). The goal is to get to the point $(0, 0)$ – by that, there will be no problems left with accounts and user questions.

Note that the actions corresponding to the vectors $\overrightarrow{a}$ and $\overrightarrow{c}$ do not lead to $(0, 0)$, except when these actions are performed from points $(1, 0)$ and $(0, 1)$, respectively. In other words, Igor will need no more than one of these actions, and if he does, it will be only once – at the very last minute.
To move to the point $(0, 0)$ by actions corresponding to vectors $\overrightarrow{b}$ and $\overrightarrow{d}$, you need to be at points $(2, 0)$ and $(1, 1)$, respectively.

So, it is necessary to use the vectors $\overrightarrow{b}$ and $\overrightarrow{d}$ to move from point $(10, 15)$ to point $(2, 0)$, or $(1, 1)$, or $(1, 0)$ or $(0, 1)$ in a minimum number of «steps», after which it would take another step to move to $(0, 0)$.

Consider the case of moving to $(2, 0)$: let this require x vectors $\overrightarrow{b}$ and y vectors $\overrightarrow{d}$, i.e. $x \cdot \overrightarrow{b} + y \cdot \overrightarrow{d} = (-8, -15)$, or

$$\begin{cases} -2x + 0y = -8 \\ 1x - 1y = -15 \end{cases},$$

thus $x = 4$, $y = 19$, i.e. Igor will need $4 + 19 + 1 = 24$ actions in total. Having similarly considered the points $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, we find that the 24 actions just found are the fastest possible way to achieve the goal.

Task 5.

1. Анна утверждает, что можно записать число, кратное 2023^{2024}, не используя цифры «0» и последовательностей цифр «13» и «666», а суеверный Тимур говорит, что это невозможно. Кто из них прав? Обоснуйте свой ответ с помощью математики, а не суеверий.

   Anna claims that it is possible to write a number that is a multiple of 2023^{2024} without using the digit «0» and the sequences of digits «13» and «666», but superstitious Timur says that it's impossible. Who is right? Explain your answer using mathematics, not superstition.

2. Анна утверждает, что можно записать число, кратное 2023^{2023}, не используя цифры «0» и последовательностей цифр «13» и «666», а суеверный Тимур говорит, что это невозможно. Кто из них прав? Обоснуйте свой ответ с помощью математики, а не суеверий.

   Anna claims that it is possible to write a number that is a multiple of 2023^{2023} without using the digit «0» and the sequences of digits «13» and «666», but superstitious Timur says that it's impossible. Who is right? Explain your answer using mathematics, not superstition.

3. Анна утверждает, что можно записать число, кратное $2023^{2023^{2023}}$, не используя цифры «0» и последовательностей цифр «13» и «666», а суеверный Тимур говорит, что это невозможно. Кто из них прав? Обоснуйте свой ответ с помощью математики, а не суеверий.

Anna claims that it is possible to write a number that is a multiple of $2023^{2023^{2023}}$ without using the digit «0» and the sequences of digits «13» and «666», but superstitious Timur says that it's impossible. Who is right? Explain your answer using mathematics, not superstition.

4. Анна утверждает, что можно записать число, кратное $2023^{2024^{2023}}$, не используя цифры «0» и последовательностей цифр «13» и «666», а суеверный Тимур говорит, что это невозможно. Кто из них прав? Обоснуйте свой ответ с помощью математики, а не суеверий.

   Anna claims that it is possible to write a number that is a multiple of $2023^{2024^{2023}}$ without using the digit «0» and the sequences of digits «13» and «666», but superstitious Timur says that it's impossible. Who is right? Explain your answer using mathematics, not superstition.

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Докажем, что требуемое число можно записать при помощи только цифры « 1» – а значит, Анна права.

Итак, пусть a_n – натуральное число, десятичная запись которого состоит из n «единиц», т.е. $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 111$, $\ldots$. Пусть r_n – остатки от деления a_n на 2023^{2024} при всевозможных натуральных n. Если среди $r_1, r_2, \ldots, r_{2023^{2024}}$ есть $r_k = 0$, то соответствующее a_k кратно 2023^{2024}, что доказывает правоту Анны.

Если же среди $r_1, r_2, \ldots, r_{2023^{2024}}$ нет «0», то, согласно принципу Дирихле, найдутся $r_i = r_j$ ($i \neq j$. Не ограничивая общности, будем считать $i < j$). Тогда $a_j - a_i = a_{j-i} \cdot 10^i$ кратно 2023^{2024}, при этом 10 взаимно просто с 2023 – а значит, a_{j-i} кратно 2023^{2024}, что доказывает правоту Анны.

Критерии оценивания:

- присутствует идея использовать в записи числа только одну цифру – 1 балл;
- при рассмотрении остатков использован принцип Дирихле – 2 балла;
- при рассмотрении остатков использован принцип Дирихле, доказано, что остаток при делении a_n на нужное число может быть равен 0 – 3 балла;
- верный ответ при незначительных ошибках в решении – 4 балла;
- полностью верные решение и ответ – 5 баллов.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let's prove that the required number can be written using only the digit « 1», which means Anna is right.

First, let a_n be a positive integer which decimal notation consists of n digits «1», i.e. $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 111$, $\ldots$. Let r_n be the remainders from dividing a_n by 2023^{2024} for all possible integers n. If among $r_1, r_2, \ldots, r_{2023^{2024}}$ there is $r_k = 0$, then the corresponding a_k is a multiple of 2023^{2024}, which proves Anna is right.

If among $r_1, r_2, \ldots, r_{2023^{2024}}$ there is no «0», then, according to the Dirichlet's principle, there exist $r_i = r_j$ ($i \neq j$; without loss of generality, we assume $i < j$). Then $a_j - a_i = a_{j-i} \cdot 10^i$ is a multiple of 2023^{2024}, while 10 is coprime with 2023 – thus, a_{j-i} is a multiple of 2023^{2024}, which proves Anna is right.

Criteria:

- there is an idea to use only one digit to write the required number – 1 point;
- when considering remainders, the Dirichlet principle was used – 2 points;
- when considering remainders, the Dirichlet principle was used, also it was proven that the remainder when dividing a_n by the required number can be equal to 0 – 3 points;

- correct answer with minor errors in the solution – 4 points;
- completely correct solution and answer – 5 points.

Task 6.

1. Из бо́льшего правильного 8-угольника вырезали меньший правильный 6-угольник. Обязательно ли можно провести прямую так, чтобы она разделила оставшуюся фигуру на две равновеликие (т.е. равные по площади) фигуры?

   From the larger regular 8-gon a smaller regular 6-gon was cut out. Is it always possible to draw a straight line that divides the remaining figure into two figures with equal areas?

2. Из бо́льшего правильного 6-угольника вырезали меньший правильный 10-угольник. Обязательно ли можно провести прямую так, чтобы она разделила оставшуюся фигуру на две равновеликие (т.е. равные по площади) фигуры?

   From the larger regular 6-gon a smaller regular 10-gon was cut out. Is it always possible to draw a straight line that divides the remaining figure into two figures with equal areas?

3. Из бо́льшего правильного 8-угольника вырезали меньший правильный 10-угольник. Обязательно ли можно провести прямую так, чтобы она разделила оставшуюся фигуру на две равновеликие (т.е. равные по площади) фигуры?

   From the larger regular 8-gon a smaller regular 10-gon was cut out. Is it always possible to draw a straight line that divides the remaining figure into two figures with equal areas?

4. Из бо́льшего правильного 10-угольника вырезали меньший правильный 6-угольник. Обязательно ли можно провести прямую так, чтобы она разделила оставшуюся фигуру на две равновеликие (т.е. равные по площади) фигуры?

   From the larger regular 10-gon a smaller regular 6-gon was cut out. Is it always possible to draw a straight line that divides the remaining figure into two figures with equal areas?

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Здесь и далее будем называть центром правильного $2n$-угольника центр описанной около него окружности – он располагается на пересечении наибольших диагоналей $2n$-угольника. Заметим, что произвольная прямая l, проходящая через центр правильного $2n$-угольника, делит его на два равных (а значит, и равновеликих) многоугольника: они совмещаются поворотом вокруг центра исходного $2n$-угольника на $180°$.

Пусть A – центр исходного (бо́льшего) 8-угольника, а B – центр меньшего 6-угольника. Тогда прямая AB делит каждый из них на два равновеликих многоугольника, т.е. по каждую сторону AB лежит половина площади каждого из двух упомянутых многоугольников – а значит, эта прямая удовлетворяет условиям задачи.

Критерии оценивания:

- доказано, что если центры многоугольников совпадают, то любая прямая, проходящая через эти центры, делит фигуру на равновеликие – 1 балл;

- показано, что прямая, проходящая через центр правильного $2n$-угольника, делит его на два равных/равновеликих – 3 балла;
- доказано, что требуемая прямая соединяет центры многоугольников – 5 баллов.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Here and later we will call the center of a regular $2n$-gon the center of its circumcircle – it is located at the intersection of the largest diagonals of the $2n$-gon. Note that an arbitrary line l passing through the center of a regular $2n$-gon divides it into two equal (and therefore having equal areas) polygons: they coincide after rotating around the center of the original $2n$-gon by 180° .

Let A be the center of the original (larger) octagon, and B the center of the smaller 6-gon. Then the line AB divides each of them into two equal polygons, i.e. by each side from AB lies half the area of each of the two polygons, which means that the line satisfies the task's conditions.

Criteria:

- it has been proven that if the centers of the polygons coincide, then any line passing through these centers divides the figure into two with equal areas – 1 point;
- it is shown that a line passing through the center of a regular $2n$-gon divides it into two equal/equal-sized – 3 points;
- it is proved that the required line connects the centers of the polygons – 5 points.