

10 класс

Задача 1. Есть два приведенных (то есть с коэффициентом 1 при старшей степени) многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ равных четных степеней с вещественными коэффициентами. Известно, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет вещественных корней. Какие из следующих уравнений имеют, а какие не имеют вещественные корни (хотя бы один корень)?

1. $P(x) = Q(x + 1)$
2. $P(x + 1) = Q(x + 1)$
3. $P(x + 2) = Q(x + 1)$

Ответ: Уравнения 1 и 3 имеют хотя бы по одному вещественному корню каждое, а уравнение 2 не имеет ни одного вещественного корня.

Решение. Из условия следует, что $P(x) = x^{2n} + ax^{2n-1} + p(x)$, $Q(x) = x^{2n} + bx^{2n-1} + q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены степени не выше $2n - 2$. Так как уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет вещественных корней, то и уравнение $P(x + 1) = Q(x + 1)$ не может иметь вещественных корней (так как мы имеем простую замену переменных). Поскольку $P(x) = Q(x)$ не имеет вещественных корней, имеем $a = b$ (иначе бы $P(x) - Q(x)$ был бы многочленом нечетной степени $2n - 1$ и потому имел бы хотя бы один вещественный корень).

Рассмотрим уравнение $P(x) = Q(x + 1)$ и «раскроем» все члены $(x + 1)^k$, где $0 \leq k \leq 2n$, по формуле бинома:

$$\begin{aligned} Q(x + 1) &= (x + 1)^{2n} + b(x + 1)^{2n-1} + q(x + 1) = (x^{2n} + 2nx^{2n-1} + r(x)) + b(x^{2n-1} + s(x)) + t(x) = \\ &= x^{2n} + (2n + a)x^{2n-1} + u(x), \end{aligned}$$

где $a = b$, многочлены $r(x), s(x), t(x), u(x)$ имеют степени не выше $2n - 2$. Следовательно,

$$P(x) - Q(x + 1) = (x^{2n} + ax^{2n-1} + p(x)) - (x^{2n} + (2n + a)x^{2n-1} + u(x)) = -2nx^{2n-1} + (p(x) - u(x))$$

– многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами и, следовательно, уравнение $P(x) = Q(x + 1)$ имеет хотя бы один вещественный корень.

Уравнение $P(x + 1) = Q(x)$ имеет вещественный корень, что доказывается из предыдущих рассуждений после «перестановки» P и Q , из чего после простой замены переменной следует существование вещественного корня уравнения $P(x + 2) = Q(x + 1)$.

Критерии оценивания:

- верное решение пункта 2 – 1 первичный балл;
- верное решение п.1 или п.3 – 2 первичных балла;
- верное решение двух из трех пунктов – 3 первичных балла;
- верное решение всех пунктов, но с незначительными ошибками, не влияющими на ход рассуждений – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение всех пунктов – 5 первичных баллов.

Задача 2. Множество всех целых положительных чисел разбили на два непересекающихся подмножества – A и B . Докажите, что для любого целого $n > 0$ найдутся такие целые $x > y > n$, что $\{x, y, x + y\} \subseteq A$ или $\{x, y, x + y\} \subseteq B$.

Решение. Пусть (без ограничения общности) множество A содержит конечное число элементов, наибольший из которых равен m . Тогда $\{m+1, m+2, 2m+3\} \subset B$, и условие задачи выполнено.

Теперь будем считать, что каждое из множеств A, B содержит бесконечное число элементов. Предположим, что существует такое целое $n > 0$, что для любых целых $x > y > n$ множество $\{x, y, x+y\}$ не содержится ни в A , ни в B . Выберем $a > b > c > n$ из множества A с условием $b - c > n$ (по предположению, $(b - c) \notin A$, иначе $\{b, b - c, c\} \subset A$), что возможно, поскольку A бесконечно. Тогда $\{a + b, b + c, c + a\} \subset B$ (иначе нарушается предположение), но тогда $(b - c) \notin B$, иначе $\{a + b, c + a, b - c\} \subset B$. Получили, что число $(b - c)$ не содержится ни в A , ни в B , что противоречит условию. Таким образом, исходное утверждение доказано.

Критерии оценивания:

- приведено решения для случая, когда одно из множеств A, B конечно – 2 первичных балла;
- приведено верное решение, содержащее незначительные недочеты – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 3. Бесконечная последовательность $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ строится следующим образом: $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, и для $n > 3$

$$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} + a_{n-3}$$

Докажите, что для любого целого $d > 0$ найдется член этой последовательности, кратный d .

Решение. Зафиксируем произвольное целое $d > 0$ и рассмотрим последовательность $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$, где b_i – остаток при делении члена a_i исходной последовательности на d для всякого $i = 1, 2, 3, \dots$. Требуется доказать, что в последовательности $\{b_i\}_{i=1,2,3,\dots}$ встретится 0.

Заметим, что количество троек (b_i, b_{i+1}, b_{i+2}) бесконечно, при этом по каждой такой тройке можно однозначно определить как предыдущую (b_{i-1}, b_i, b_{i+1}) , так и следующую тройку в последовательности, при этом количество различных троек конечно (их не более чем d^3), т.е. найдутся различные i, j , для которых

$$b_i = b_j; \quad b_{i+1} = b_{j+1}; \quad b_{i+2} = b_{j+2}.$$

Из вышесказанного следует, что последовательность $\{b_i\}$ является периодической. Дополняя ее элементом $b_0 = 0$ (т.к. $a_0 = a_3 - a_2 a_1 = 1 - 1 \cdot 1 = 0 \equiv 0 \pmod{d}$), делаем вывод, что $b_{|i-j|} = 0$ (для найденных ранее различных i, j), откуда $a_{|i-j|}$ кратно d , что и требовалось доказать.

Критерии оценивания:

- показано, что по тройке остатков можно однозначно определить предыдущую и следующую тройку остатков – 1 первичный балл;
- показано, что последовательность является периодической – 2 первичных балла;
- полностью верное доказательство – 5 первичных баллов.

Задача 4. За один ход разрешается одновременно заменять все члены последовательности $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ действительных чисел на $|a - x_1|, |a - x_2|, |a - x_3|, \dots, |a - x_n|$, соответственно (число a для разных ходов может быть разным). Докажите, что за конечное число ходов из любой начальной последовательности можно получить последовательность, состоящую только из нулей $(0, 0, 0, \dots, 0)$, и найдите наименьшее число ходов, за которое гарантированно можно этого добиться для фиксированного n .

Ответ: n

Решение. Покажем, что n шагов *достаточно* для получения нулевой (т.е. состоящей только из нулей) последовательности. Будем обозначать $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ последовательность после k -го шага преобразований, и за $a^{(k)}$ будем обозначать значение a , выбранное на k -м шаге. Пусть $a^{(1)} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, тогда $x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$. Далее пусть $a^{(2)} = \frac{x_1^{(1)} + x_3^{(1)}}{2}$, тогда $x_1^{(2)} = x_2^{(2)} = x_3^{(2)} = \frac{1}{2}|x_1^{(1)} - x_3^{(1)}|$. Продолжая аналогично, на k -м шаге выберем

$$a^{(k)} = \frac{x_1^{(k-1)} + x_{k+1}^{(k-1)}}{2},$$

тогда

$$x_1^{(k)} = x_2^{(k)} = \dots = x_{k+1}^{(k)} = \frac{1}{2}|x_1^{(k-1)} - x_{k+1}^{(k-1)}|$$

для $k < n$. На n -м шаге выберем $a^{(n)} = x_1^{(n-1)}$ и получим последовательность из нулей.

Теперь покажем, что n шагов *необходимы* для некоторых начальных последовательностей, например, $1!, 2!, 3!, \dots, n!$. Докажем это индукцией по n . База (для $n = 1$) тривиальна.

Индукционная гипотеза: пусть утверждение верно для некоторого целого $k \geq 1$, т.е. последовательность $1!, 2!, \dots, k!$ невозможно свести к нулевой последовательности менее чем за k шагов. Докажем аналогичное для $k + 1$.

Отметим, что если m – наименьшее число шагов, необходимое для «обнуления» последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n$, то $m^{(k-1)} \leq a^{(k)} < M^{(k-1)}$ для $k = 1, 2, \dots, m$, где

$$m^{(k-1)} = \min\{x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}\}$$

$$M^{(k-1)} = \max\{x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}\}$$

Действительно, для $a^{(k)} < m^{(k-1)}$ и всех i имеем

$$x_i^{(k+1)} = |a^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = |a^{(k+1)} - |a^{(k)} - x_i^{(k-1)}|| = |x_i^{(k-1)} - a^{(k+1)} - a^{(k)}| = |x_i^{(k-1)} - (a^{(k+1)} + a^{(k)})|$$

На k -м шаге мы устанавливаем $a = a^{(k)} + a^{(k+1)}$ для «экономии шагов», что противоречит минимальности m .

С другой стороны, для $a^{(k)} > M^{(k-1)}$ и всех i имеем

$$x_i^{(k+1)} = |a^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = |a^{(k+1)} - |a^{(k)} - x_i^{(k-1)}|| = |-x_i^{(k-1)} - a^{(k+1)} + a^{(k)}| = |x_i^{(k-1)} - (a^{(k)} - a^{(k+1)})|$$

На k -м шаге мы устанавливаем $a = a^{(k)} - a^{(k+1)}$ для «экономии шагов», что опять противоречит минимальности m .

Итак, $M^{(0)} \geq M^{(1)} \geq \dots \geq M^{(m)}$, откуда $a^{(k)} \leq M^{(0)}$ для всех k . При этом из $m^{(k)} \geq 0$ следует $a^{(k)} \geq 0$ для всех k .

Из предположения, что последовательность $1!, 2!, \dots, k!, (k+1)!$ можно «обнулить» за не более чем k шагов, следует, что последовательность $1!, 2!, \dots, k!$ также обнулена этими шагами, причем для нее это количество шагов является минимальным (индукционная гипотеза). Из вышеизложенного следует, что $0 \leq a^{(i)} \leq k!$ для $i = 1, 2, \dots, k$, но тогда

$$x_{k+1}^{(k)} = ||\dots|(k+1)! - a^{(1)}| - a^{(2)}| - \dots - a^{(k)}| = (k+1)! - (a^{(1)} + a^{(2)} + \dots + a^{(k)}) \geq (k+1)! - k \cdot k! > 0,$$

что противоречит $x_{k+1}^{(k)} = 0$. Значит, последовательность $1!, 2!, \dots, k!, (k+1)!$ невозможно обнулить k шагами, и потребуется как минимум $k+1$ шаг, что завершает индукцию и решение задачи.

Критерии оценивания:

- приведено верное доказательство возможности получения последовательности нулей – 2 первичных балла;

- помимо верного доказательства возможности получения последовательности нулей, доказаны неравенства для a либо имеются иные значительные продвижения в решении – 3 первичных балла;
- приведено верное решение, содержащее незначительные недочеты – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 5. Точки A, B, C, D расположены на прямой в указанном порядке, причем $AB = 2$, $BC = 1$, $CD = c$. Найдите все положительные c , для каждого из которых найдется такая точка P (не лежащая на прямой AB), что PB, PC – трисектрисы (лучи, делящие угол на три равные части) угла $\angle APD$.

Ответ: $(3/5; +\infty)$

Решение. Ясно, что необходимо $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD$.

Сначала рассмотрим вспомогательную конструкцию: пусть для фиксированных точек A, B и фиксированного положительного $k \neq 1$ требуется найти все точки X плоскости, для которых $\frac{AX}{BX} = k$. Зададимся системой координат, в которой $A(-a; 0)$ и $B(a; 0)$ для $a = \frac{1}{2}|AB|$; $X(x; y)$. Тогда $\frac{AX^2}{BX^2} = k^2 = \frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$, откуда

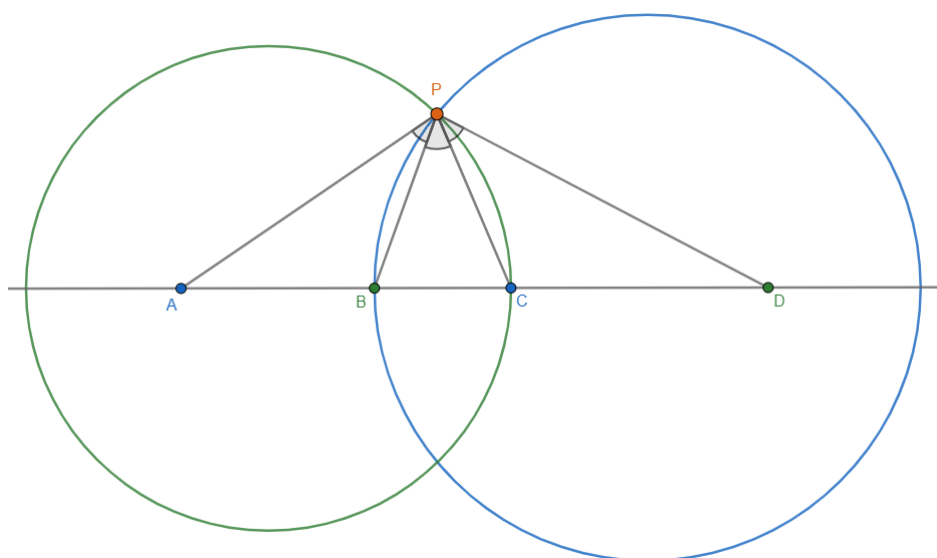
$$\left(x + \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \cdot a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2ka}{k^2 - 1}\right)^2$$

– уравнение окружности, называемой *окружностью Аполлония* точек A, B , и ее радиус равен $\frac{k \cdot |AB|}{|k^2 - 1|}$. Заметим, что для $k > 1$ точка A находится вне этой окружности, а точка B – внутри нее.

Теперь докажем еще одно утверждение: если Ω – окружность Аполлония точек A, B , и Ω пересекает отрезок AB в точке C , то для любой точки $P \in \Omega$ выполнено $\angle APC = \angle BPC$, т.е. PC – биссектриса угла APB . Это утверждение очевидно, если вспомнить свойство биссектрисы о делении ею противоположной стороны треугольника, и если заметить, что точка C лежит на Ω , из чего следует $\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC}$, после чего остается только вспомнить указанное свойство (в данном случае мы используем его как признак).

Вернемся к задаче. Ввиду доказанного выше, необходимо, чтобы окружности Аполлония для A, C ($k_1 = \frac{AB}{BC} = 2 > 1$, $R_1 = 2$) и D, B ($k_2 = \frac{CD}{BC} = c$) имели две общие точки (поскольку центры окружностей лежат на прямой AB , единственная общая точка этих окружностей лежала бы на этой же прямой). Ясно, что если $c > 1$, то точка B лежит внутри второй окружности, тогда две окружности пересекаются. Если $c = 1$, то точка P лежит на срединном перпендикуляре к BD , который пересекает первую окружность ввиду $R_1 = 2 > 1$.

Если же $0 < c < 1$, то для пересечения окружностей необходимо и достаточно $2R_1 - 2R_2 < BC = 1$, откуда ввиду $R_2 = \frac{c}{1-c}$ получим $c > \frac{3}{5}$.

**Критерии оценивания:**

- задача сведена к поиску пересечений окружностей Аполлония – 2 первичных балла;
- доказано, что все $c > 1$ подходят – 3 первичных балла;
- верно и обоснованно найдены $c \in (3/5; 1) \cup (1; +\infty)$, но упущено либо неверно обосновано $c = 1$ – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.