

11 класс

Задача 1. Пусть D – некоторое фиксированное непустое множество, а $f(x, y)$ – функция двух переменных, принимающих значения из D . Известно, что

1. $f(x, f(y, z)) = f(f(x, z), y)$ для любых $x, y, z \in D$,
2. для любых значений $x, z \in D$ существует такое $y \in D$, что $f(x, y) = z$.

Докажите, что существует такое $t \in D$, что $f(t, x) = x$ для всех $x \in D$.

Решение. Сначала докажем, что $f(x, y) = f(y, x)$ для любых $x, y \in D$. Согласно свойству 2, для x и y существует такое d , что $f(x, d) = y$; тогда $f(x, y) = f(x, f(x, d)) =$ (в силу свойства 1) $= f(f(x, d), x) = f(y, x)$. Доказано.

Далее, пусть p – произвольный элемент D ; согласно свойству 2, существует такое $t \in D$, что $f(p, t) = p$. Для этого t и произвольного $x \in D$ имеем $f(t, x) = f(t, f(p, c))$, где c таково, что $f(p, c) = x$ (см. свойство 2); тогда $f(t, x) = f(t, f(p, c)) =$ (в силу доказанного выше) $= f(t, f(c, p)) =$ (в силу свойства 1) $= f(f(t, p), c) =$ (в силу доказанного выше) $= f(f(p, t), c) = f(p, c) = x$ (так как $f(p, c) = x$), что и требовалось доказать.

Критерии оценивания:

- доказана коммутативность функции – 2 первичных балла;
- приведено верное решение, содержащее незначительные недочеты – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 2. Пусть $b_1, b_2, \dots, b_{2025}$ – неотрицательные числа, и

$$(x + b_1)(x + b_2) \cdots (x + b_{2025}) = a_{2025}x^{2025} + a_{2024}x^{2024} + \cdots + a_1x + a_0$$

Докажите, что $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ для любого $i = 1, 2, 3, \dots, 2024$.

Решение. Докажем индукцией более общее утверждение:

Для любого целого $n \geq 2$, если $b_1, \dots, b_n$ неотрицательны и $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = (x + b_1) \cdots (x + b_n)$, то $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ для любого $i = 1, 2, \dots, n-1$.

База индукции ($n = 2$): в таком случае $a_2 = 1, a_1 = b_1 + b_2$ и $a_0 = b_1b_2$, а значит $a_1^2 = b_1^2 + 2b_1b_2 + b_2^2 \geq b_1b_2 = a_0a_2$ – доказано.

Индукционная гипотеза: пусть для некоторого $n \geq 2$ и любых неотрицательных $b_1, \dots, b_n$, если $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = (x + b_1) \cdots (x + b_n)$, то $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ для любого $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Шаг индукции: рассмотрим многочлен $(x + b_1) \cdots (x + b_n)(x + b)$, где $b \geq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} (x + b_1) \cdots (x + b_n)(x + b) &= (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0)(x + b) = \\ &= a_nx^{n+1} + (a_nb + a_{n-1})x^n + (a_{n-1}b + a_{n-2})x^{n-1} + \cdots + (a_2b + a_1)x^2 + (a_1b + a_0)x + a_0b \end{aligned}$$

Для завершения индукционного шага достаточно рассмотреть (доказать) три неравенства:

1. $(a_nb + a_{n-1})^2 \geq a_n(a_{n-1}b + a_{n-2})$;
2. $(a_1b + a_0)^2 \geq a_0b(a_2b + a_1)$;
3. $(a_ib + a_{i-1})^2 \geq (a_{i+1}b + a_i)(a_{i-1}b + a_{i-2})$ для всех $i = 2, \dots, n-1$.

Рассмотрим их по порядку:

1. $(a_n b + a_{n-1})^2 = a_n^2 b^2 + 2a_n a_{n-1} b + a_{n-1}^2 \geq a_n a_{n-1} b + a_{n-1}^2 \geq (\text{индукционная гипотеза}) \geq a_n a_{n-1} b + a_n a_{n-2} = a_n(a_{n-1} b + a_{n-2})$.
2. $(a_1 b + a_0)^2 = a_1^2 b^2 + 2a_1 a_0 b + a_0^2 \geq (\text{индукционная гипотеза}) \geq a_2 a_0 b^2 + a_1 a_0 b = a_0 b(a_2 b + a_1)$.
3. Пусть теперь $i \in \{2, \dots, n-1\}$ – произвольное целое число. Раскроем скобки в левой части неравенства: $(a_i b + a_{i-1})^2 = a_i^2 b^2 + 2a_i a_{i-1} b + a_{i-1}^2$. Раскроем скобки в правой части неравенства: $(a_{i+1} b + a_i)(a_{i-1} b + a_{i-2}) = a_{i+1} a_{i-1} b^2 + (a_{i+1} a_{i-2} + a_i a_{i-1}) b + a_i a_{i-2}$.

По предположению индукции первое слагаемое из левой части неравенства не меньше первого слагаемого из правой части неравенства: $a_i^2 b^2 \geq a_{i+1} a_{i-1} b^2$. Аналогично, последнее слагаемое из левой части неравенства не меньше последнего слагаемого из правой части неравенства: $a_{i-1}^2 \geq a_i a_{i-2}$.

Теперь сравним средние слагаемые в левой и правой частях неравенства: очевидно, что для этого достаточно сравнить $a_i a_{i-1}$ и $a_{i+1} a_{i-2}$. Для этого умножим обе величины на $a_i a_{i-1}$: $(a_i a_{i-1})^2 = a_i^2 a_{i-1}^2 \geq (\text{индукционная гипотеза}) \geq (a_{i+1} a_{i-1})(a_i a_{i-2}) = (a_{i+1} a_{i-2})(a_i a_{i-1})$. Следовательно, $a_i a_{i-1} \geq a_{i+1} a_{i-2}$, что завершает доказательство.

Шаг индукции доказан, а вместе с ним и утверждение, обобщающее утверждение задачи.

Критерии оценивания:

- приведена плодотворная идея, но ее реализация либо отсутствует, либо содержит существенную ошибку – 1 первичный балл;
- доказана база индукции, но нет доказательства шага индукции – 2 первичных балла;
- доказана база индукции, но доказательство шага индукции приведено только для некоторых a_i ; либо реализована иная плодотворная идея, но с существенной ошибкой – 3 первичных балла;
- приведено верное решение, содержащее незначительные недочеты – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 3. В стране N есть 10 городов, каждая пара которых соединена двусторонним авиамаршрутом, который обеспечивается одной из двух авиакомпаний. Докажите, что одна из этих авиакомпаний может предложить своим пассажирам два циклических маршрута, каждый из которых проходит по нечетному числу городов, причем ни один город не является частью обоих маршрутов.

Решение. Построим граф (K_{10}) , вершины которого – города, а ребра – авиамаршруты между городами. Будем красить ребра в красный и синий цвета в зависимости от того, какой авиакомпания принадлежит соответствующий маршрут. Требуется доказать, что в построенном графе существуют два непересекающихся нечетных цикла одного цвета.

Лемма 1. Если каждое ребро полного графа K_6 (граф с 6-ю вершинами, каждая пара из которых соединена ребром) покрасить в один из двух цветов, то найдется треугольник (цикла длины 3), все стороны (ребра) которого имеют один цвет.

Доказательство. Пусть $v_1, v_2, \dots, v_6$ – вершины графа. Если ребра $v_i v_j$ и $v_i v_k$ окрашены в один цвет, то будем считать, что в этот цвет окрашен «угол» $v_j v_i v_k$. Пусть r_i, b_i – количества соответственно красных и синих ребер, выходящих из вершины v_i , тогда $r_i + b_i = 5$ (для всех i) и общее число окрашенных углов

$$\sum_{i=1}^6 (C_{r_i}^2 + C_{b_i}^2) \geq \sum_{i=1}^6 (C_2^2 + C_3^2) = 24$$

С другой стороны, в каждом «одноцветном» треугольнике все три угла должны быть окрашены в один цвет, а в каждом «неодноцветном» треугольнике есть только один окрашенный угол.

Всего есть $C_6^3 = 20$ треугольников, и пусть m из них одноцветны, тогда $3m + (20 - m) \geq 24$, откуда $m \geq 2 > 1$, что завершает доказательство леммы 1.

Лемма 2. Если каждое ребро полного графа K_5 (граф с 5-ю вершинами, каждая пара из которых соединена ребром) покрасить в один из двух цветов, и в этом графе нет одноцветного треугольника (цикла длины 3, все ребра которого окрашены в один цвет), то в этом графе есть два непересекающихся (не имеющих общих ребер) цикла, каждый из которых окрашен в один цвет и имеет длину 5.

Доказательство. Пусть $v_1, v_2, \dots, v_5$ – вершины графа. Рассмотрим ребра $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5$ – если три из них имеют один и тот же цвет, то найдется одноцветный треугольник, что противоречит условию: действительно, пусть v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4 – красные, тогда все ребра v_2v_3, v_3v_4, v_4v_2 должны быть синими (иначе получим красный треугольник), но тогда мы имеем синий треугольник. Итак, из каждой вершины выходят по два красных и два синих ребра.

Рассмотрим граф, состоящий из 5 вершин и только красных ребер – в таком графе степень каждой вершины равна 2, а значит, он либо является циклом длины 5, либо разбивается на меньшие циклы. Если разбить граф на 5 вершинах степени 2 на меньшие циклы, то либо получим цикл из 1 вершины (в наших условиях это невозможно), либо одноцветный треугольник, что также исключено (см. выше). Итак, граф на красных ребрах – цикл длины 5, аналогичный вывод делаем для графа на синих ребрах. *Лемма 2 доказана.*

Вернемся к задаче: пусть $v_1, v_2, \dots, v_{10}$ – вершины графа K_{10} и пусть $v_1v_2v_3$ – одноцветный треугольник в нем (его существование следует из Леммы 1). В графе $K_{10} \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$ также есть одноцветный треугольник, т.к. количество его вершин не меньше 6 (даже 7) – пусть это треугольник $v_4v_5v_6$. Если эти треугольники окрашены в один цвет, то решение завершено. Если же нет (допустим, $v_1v_2v_3$ – синий, а $v_4v_5v_6$ – красный), то рассмотрим ребра v_iv_j для $i = 1, 2, 3$, $j = 4, 5, 6$ – всего 9 ребер и, согласно принципу Дирихле, среди них найдутся 5 ребер одного цвета (без ограничения общности будем считать, что синего). Тогда для некоторого $k \in \{4, 5, 6\}$ найдутся два синих ребра из тройки v_1v_k, v_2v_k, v_3v_k , т.е. мы имеем один синий и один красный треугольники с общей вершиной v_k .

Итак, «угол» $v_1v_2v_3$ – синий, а «угол» $v_3v_4v_5$ – красный. Рассмотрим граф $K_{10} \setminus \{v_1, v_2v_3, v_4, v_5\} = K_5$. Если в нем есть одноцветный треугольник, то решение завершено: берем его и соответствующий ему по цвету $v_1v_2v_3$ или $v_3v_4v_5$. Если в K_5 нет одноцветного треугольника, то, согласно Лемме 2, в ней найдутся два разноцветных цикла длины 5 – в этом случае берем нужный из этих циклов в качестве второго циклического маршрута. Доказательство утверждения задачи завершено.

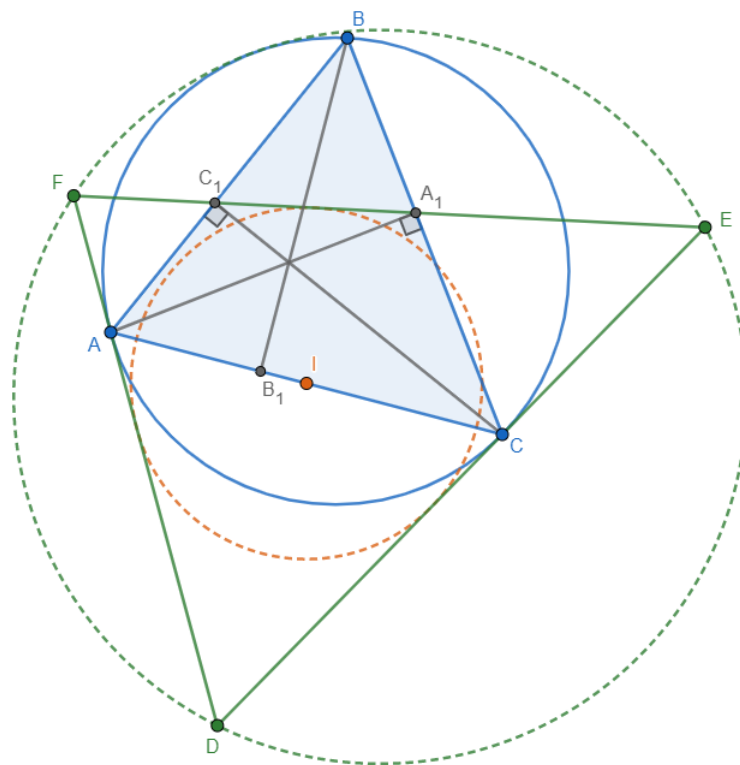
Критерии оценивания:

- доказаны вспомогательные леммы либо использована теорема Рамсея – 2 первичных балла;
- приведено в целом верное решение, но допущена незначительная ошибка в рассуждениях – 3 первичных балла;
- полностью верное доказательство – 5 первичных баллов.

Задача 4. Дан остроугольный треугольник ABC , около которого описана окружность Ω и в котором проведены высоты AA_1, CC_1 . Касательные к Ω , проведенные в точках A и C , пересекаются в точке D , и прямая A_1C_1 пересекает прямые CD, AD в точках E, F , соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника DEF касается Ω .

Решение. Пусть B_1 – основание высоты $\triangle ABC$, проведенной из точки B , а I – середина AC . Заметим, что $\angle FAC_1 = \angle ACB = \angle AC_1B_1$, откуда $B_1C_1 \parallel AF$, аналогично и $A_1B_1 \parallel CE$. Из $\angle AC_1F = \angle A_1C_1B = \angle ACB = \angle FAC_1$ следует $FA = FC_1$, откуда ввиду $IA = IC_1$ имеем

$\triangle AIF = \triangle C_1IF$, из чего следует, что FI – биссектриса угла DFE . Аналогично получаем, что EI – биссектриса угла DEF , т.е. I – центр вписанной окружности $\triangle DEF$.



Вспомним одно замечательное утверждение: отрезок, соединяющий точки касания полувписанной окружности треугольника с его сторонами, содержит центр вписанной окружности этого треугольника. Очевидно, верно и обратное: если окружность касается двух сторон треугольника так, что отрезок, соединяющий точки касания, содержит центр вписанной окружности этого треугольника, то первая окружность является полувписанной (т.е. касается двух сторон треугольника и его описанной окружности).

В нашей задаче окружность Ω касается сторон треугольника DEF в точках A, C , причем отрезок AC , как было доказано ранее, содержит центр I вписанной окружности треугольника DEF – значит, Ω является полувписанной окружностью треугольника DEF , т.е. касается его описанной окружности, что и требовалось доказать.

Теперь докажем использованное утверждение, называемое леммой Веррьера:

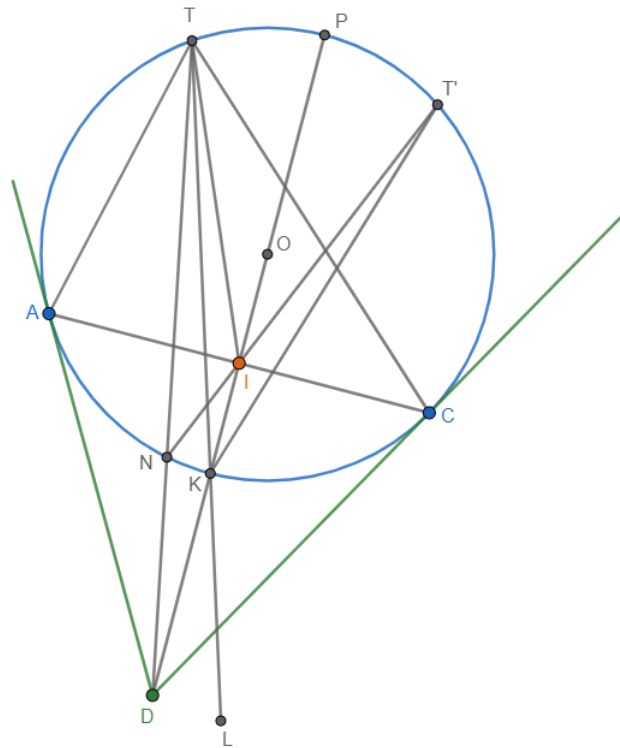
Отрезок, соединяющий точки A, C касания полувписанной окружности Ω треугольника DEF с его сторонами, содержит центр вписанной окружности этого треугольника.

Доказательство этого утверждения приводится в образовательных целях, и от участников Олимпиады оно не требовалось: достаточно было упомянуть соответствующее свойство полувписанной окружности.

Доказательство проведем в несколько этапов.

Утверждение 1. Дан треугольник ACT , около которого описана окружность Ω , прямые AD, CD – касательные к этой окружности, I – середина AC . Тогда прямая TD симметрична прямой TI относительно биссектрисы угла $\angle ATC$, т.е. содержит симедиану $\triangle ACT$, проведенную из вершины T .

Доказательство. Пусть PK – диаметр Ω , перпендикулярный AC (см. рис.), и точка T' симметрична точке T относительно PK . Отложим $\angle NIK$ (N лежит на Ω), равный $\angle TIP$ в одной с ним полуплоскости относительно PK . Ввиду $\angle T'IP = \angle TIP = \angle NIK$ получим, что точка N лежит на прямой $T'I$. Далее $\angle ITK = \angle IT'K = \angle NT'K = \angle NTK$, т.е. прямая TN содержит симедиану $\triangle ACT$, поскольку TK – биссектриса $\angle ATC$ ввиду равенства дуг AK и CK .



Пусть O – центр Ω . Четырехугольник $TOIN$ – вписанный, поскольку $\angle INT = \angle T'NT = \frac{1}{2}\angle T'OT = \angle TOP = 180^\circ - \angle TOI$. Осталось заметить, что при инверсии относительно Ω описанная окружность четырехугольника $TOIN$ перейдет в прямую TN , а точка I перейдет в точку D – значит, точки T, N, D лежат на одной прямой, т.е. TD содержит симедиану, что и требовалось доказать.

Утверждение 2 («лемма Архимеда»). Пусть A_2, C_2 – соответственно середины меньших дуг DF, DE описанной окружности треугольника DEF . Тогда точки A_2, C_2 лежат на прямых TA, TC , соответственно.

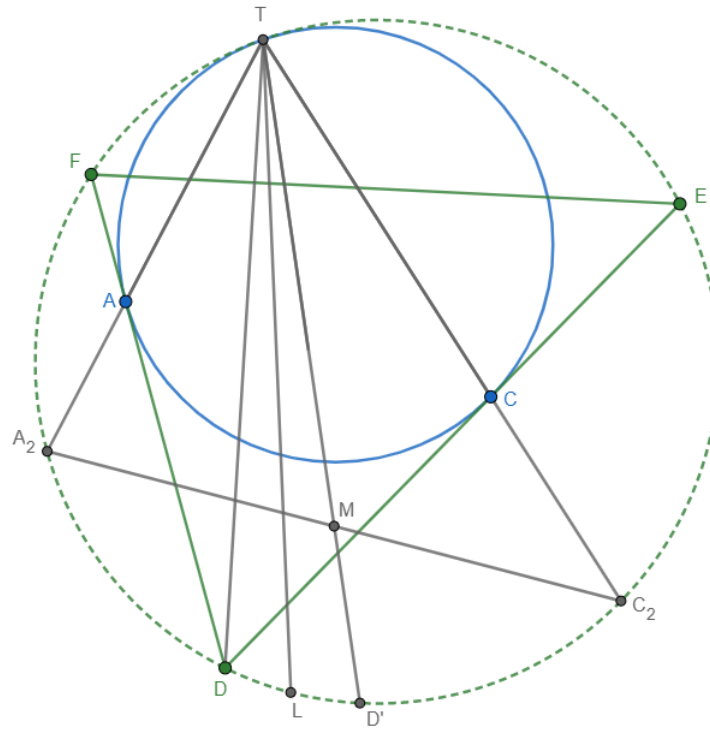
Доказательство. Очевидно, касательная к описанной окружности $\triangle TA_2C_2$, проведенная в точке A_2 , параллельна DF . Значит, гомотетия с центром T , переводящая окружность Ω в описанную окружность $\triangle TA_2C_2$, переводит прямую DF в упомянутую касательную, а точку A касания Ω с DF – в точку A_2 , т.е. точки T, A, A_2 лежат на одной прямой. Аналогично доказывается для точек T, C, C_2 .

Утверждение 3. Прямая TD содержит симедиану треугольника A_2C_2T , проведенную из вершины T (здесь T – точка касания описанных окружностей $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$, т.к. первая из них является полувписанной для $\triangle DEF$).

Доказательство. Достаточно провести гомотетию, переводящую описанную окружность треугольника AST в описанную окружность треугольника A_2C_2T . Утверждение доказано.

Утверждение 4. Пусть D' – середина дуги EF (не содержащей T) описанной окружности треугольника DEF . Тогда прямая TD' содержит медиану TM треугольника A_2C_2T .

Доказательство. Пусть L – середина дуги A_2C_2 (не содержащей T) описанной окружности треугольника DEF , тогда TL – биссектриса $\angle A_2TC_2$.



Ввиду равенства дуг ED' и FD' имеем следующее равенство для дуг: $ED - DD' = DF + DD'$, откуда $ED = DF + 2 \cdot DD'$ и $EC_2 = FA_2 + DD' = FA_2 + DL + LD'$. Далее из $A_2L = C_2L$ получаем $A_2D + DL = C_2D - DL = EC_2 - DL$, т.е. $EC_2 = A_2D + 2 \cdot DL = FA_2 + 2 \cdot DL =$ (как отмечено выше) $= FA_2 + DL + D'L$, откуда получаем равенство дуг DL и $D'L$, т.е. прямая TD' симметрична (относительно биссектрисы TL) прямой TD , содержащей симедиану, т.е. прямая TD' содержит медиану $\triangle A_2C_2T$, проведенную из вершины T , что и требовалось доказать.

Утверждение 5. Пусть J – центр окружности, вписанной в $\triangle DEF$. Тогда точка J лежит на прямой TD' .

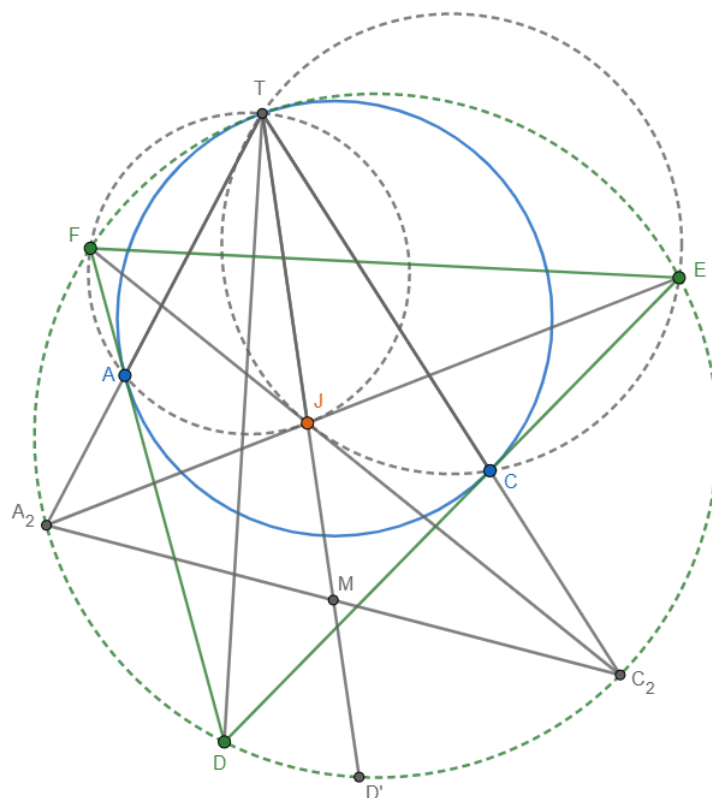
Доказательство. Из равенства дуг C_2D' и DA_2 следует равенство дуги C_2D' и FA_2 , т.е. $A_2D' \parallel FC_2$, аналогично и $C_2D' \parallel EA_2$, т.е. A_2JC_2D' – параллелограмм. Поскольку точка M – середина его диагонали A_2C_2 , то и диагональ JD' проходит через точку M , т.е. точки J, M, D' лежат на одной прямой, а поскольку на прямой MD' лежит точка T , получаем требуемое.

Утверждение 6. Четырехугольники $TECJ$, $TFAJ$ – вписанные, и прямые FC_2 , EA_2 соответственно касаются их описанных окружностей.

Доказательство. Из равенства дуг C_2D' и DA_2 следует $\angle CEA_2 = \angle CTJ$, и четырехугольник $TECJ$ – вписанный. Аналогично, вписанным является и $TFAJ$. Далее для дуг имеем $ED' = EC_2 + FA_2$, откуда $\angle ETD' = \angle C_2JE$, после чего применением обратной теоремы об угле между касательной и хордой получаем требуемое. Для четырехугольника $TFAJ$ и прямой EA_2 доказывается аналогично.

Наконец,

Утверждение 7. Точка J совпадает с точкой I .



Доказательство. Из доказанного ранее следует $\angle C_2JC = \angle CEJ = \angle FEJ = \angle FTA_2 = \angle FJA$, т.е. точки F, J, C_2 лежат на прямой. Аналогично и точки E, J, A_2 лежат на прямой, т.е. точка J лежит на AC и, как было доказано ранее, на TD' , – значит, она совпадает с точкой I , что и требовалось доказать.

Критерии оценивания:

- есть продвижения в решении задачи – 1 первичный балл;
- использовано и упомянуто (но не обязательно доказано), что центр I вписанной в $\triangle DEF$ окружности лежит на AC – 3 первичных балла;
- полностью верное доказательство – 5 первичных баллов.

Задача 5. Даны целое $a > 0$, не являющееся целой степенью числа 10, и целое $b > 0$. Верно ли, что существует такое целое $n > 0$, что в десятичной записи числа a^n встречается десятичная запись числа b ? Например, для $a = 2$ и $b = 19$ можно выбрать $n = 13$, т.к. $2^{13} = 8192$, в записи которого есть 19.

Ответ: да, верно.

Решение. Докажем, что для любого целого $a \geq 2$ ($a \neq 1 = 10^0$) и любого целого $b > 0$ найдется целое $n > 0$, для которого десятичная запись числа a^n начинается с последовательно записанных цифр числа b – иными словами, найдутся такие целые положительные m, n , что

$$10^m \cdot b < a^n < 10^m \cdot (b + 1)$$

Прологарифмируем последнее двойное неравенство с основанием 10:

$$m + \lg b < n \cdot \lg a < m + \lg(b + 1)$$

$$\lg b < n \cdot \lg a - m < \lg(b + 1)$$

Докажем, что $\lg a$ иррационально: если это не так, то $\lg a = \frac{p}{q}$ для некоторых целых положительных взаимно простых p, q , тогда $10^p = a^q$, что невозможно. Итак, $\lg a$ иррационально.

Для завершения решения задачи можно доказать, что для любого иррационального $x > 0$ и любого выбранного интервала (u, v) ($0 < u < v$) найдутся такие целые положительные m, n , что

$$u < nx - m < v$$

Заметим, что для любого целого $n > 0$ можно выбрать такое целое $m_n > 0$, что $0 < nx - m_n < 1$. Пусть $k = \lceil \frac{1}{v-u} \rceil$, т.е. отрезок $[0; 1]$ можно разбить на k равных отрезков, длина каждого из которых будет меньше длины интервала (u, v) . Рассмотрим бесконечный набор чисел $x - m_1, 2x - m_2, 3x - m_3, \dots$ и выберем из него два числа, попадающие в один и тот же из упомянутых k отрезков – пусть это числа $ix - m_i$ и $jx - m_j$ (без ограничения общности будем считать, что первое меньше второго). Тогда $jx - m_j - (ix - m_i) = t \in (0; 1/k)$.

Для найденного t рассмотрим числа $t, 2t, 3t, \dots$ – ввиду $t < 1/k$ среди них найдется число, лежащее на интервале (u, v) , что и требовалось доказать.

Осталось заметить, что в условиях нашей задачи $x = \lg a$ – иррациональное положительное число; $(u, v) = (\lg b, \lg(b+1))$ – положительный интервал (если $b = 1 \Rightarrow \lg b = 0$, то в качестве u можно выбрать любое число из интервала $(0; \lg(b+1))$). Итак, найдутся такие целые положительные m, n , что $\lg b < n \cdot \lg a - m < \lg(b+1)$, т.е. десятичная запись числа a^n будет начинаться с цифр числа b .

Критерии оценивания:

- использована идея иррациональности $\lg(a)$ – 1 первичный балл;
- в том или ином виде используется идея, что для любого иррационального $x > 0$ и любого выбранного интервала (u, v) найдутся такие целые положительные m, n , что $u < nx - m < v$ – 3 первичных балла;
- верное решение, содержащее незначительные ошибки – 4 первичных балла;
- полностью верное доказательство – 5 первичных баллов.