

7-8 классы

Задача 1. Даны числа 2025, 2035, 2045 ..., 2085. Сколькими способами можно их расставить в ряд так, чтобы сумма любых четырех последовательных чисел в ряду была кратна 3?

Ответ: 144

Решение. Заменяя числа 2025, 2035, 2045 ..., 2085 их остатками при делении на 3, получим набор 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0. Пусть ряд $a_1, a_2, a_3, \dots, a_7$ – один из искоемых («правильный»).

Заметим, что $0 \equiv a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \equiv a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \equiv a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \equiv a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \pmod{3}$, т.е. остатки при делении на 3 в «правильном» ряду циклически повторяются, и набор остатков a_1, a_2, a_3 однозначно определяет остальные остатки: $a_1 \equiv a_5 \pmod{3}$, $a_2 \equiv a_6 \pmod{3}$, $a_3 \equiv a_7 \pmod{3}$. Кроме того, $0 \equiv (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) \equiv (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + a_4 \equiv a_4 \pmod{3}$, поскольку сумма всех чисел в ряду кратна 3. Итак, $a_4 \equiv 0 \pmod{3}$.

Теперь подсчитаем количество «правильных» рядов: $3 \cdot 2^3 \cdot 3! = 144$, поскольку есть 3 способа выбрать a_4 , и для каждого из них – $2^3 \cdot 3!$ способов выбрать a_1, a_2, a_3 , после чего выбор a_5, a_6, a_7 определяется однозначно.

Критерии оценивания:

- приведена идея, что остатки циклируются – 1 первичный балл;
- доказано, что a_1, a_2, a_3 однозначно определяют остальные остатки – 2 первичных балла;
- доказано, что $a_4 \equiv 0 \pmod{3}$ – 3 первичных балла;
- приведено верное решение, содержащее незначительные недочеты либо арифметические ошибки – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 2. Найдите все решения ребуса (в десятичной системе счисления):

$$\text{FORTY} + \text{TEN} + \text{TEN} = \text{SIXTY}$$

Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, а разными буквами – разные цифры.

Ответ: $29786 + 850 + 850 = 31486$

Решение. Поскольку $Y + N + N \equiv Y \pmod{10}$, имеем $N = 0$ или $N = 5$. При этом в случае $N = 5$ получим $T + 2 \cdot E + 1 \equiv T \pmod{10}$, что невозможно, поскольку $2 \cdot E + 1$ нечетно – значит, $N = 0$, откуда из $T + 2 \cdot E \equiv T \pmod{10}$ следует $E = 5$.

Из $F \neq S$ следует, что $S = F + 1$, т.к. в разряде тысяч есть только $O + k = I$, причем k получается «переносом» из разряда сотен, поэтому $1 \leq k \leq 2$ (три слагаемых в разряде сотен не могут иметь сумму более 27). Кроме того, для $S = F + 1$ необходимо $O + k > 9$, откуда $O \geq 8$, $I \leq 1$, т.е. $I = 1$, а значит $k = 2$, $O = 9$, откуда $R + 2 \cdot T + 1 \geq 20$, даже строго > 21 (т.к. $X \neq 0$, $X \neq 1 = I$), т.е. $R + 2 \cdot T \geq 21$.

Ясно, что $R + 2 \cdot T \leq 23$, поскольку $R, T < 9$ и $R \neq T$. Отсюда – три возможных случая:

1. $R + 2 \cdot T = 21$: тогда R нечетно и не равно 7 (иначе $T = R = 7$), но тогда $R = 5$, что также невозможно ввиду $E = 5$.
2. $R + 2 \cdot T = 22$: R четно и равно либо 6, либо 8 (в остальных случаях $R + 2 \cdot T < 22$ из-за $T < 9$) – в обоих случаях $X = 3$, и на буквы F, S, Y остаются либо цифры 2, 4, 7, либо цифры 2, 4, 6 – оба случая невозможны, поскольку $S = F + 1$.

3. $R + 2 \cdot T = 23$: тогда $R = 7$ и $T = 8$, откуда $X = 4$, и на буквы F, S, Y остаются цифры 2, 3, 6, откуда (ввиду $S = F + 1$) имеем $F = 2$, $S = 3$, $Y = 6$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что равенство из условия выполняется.

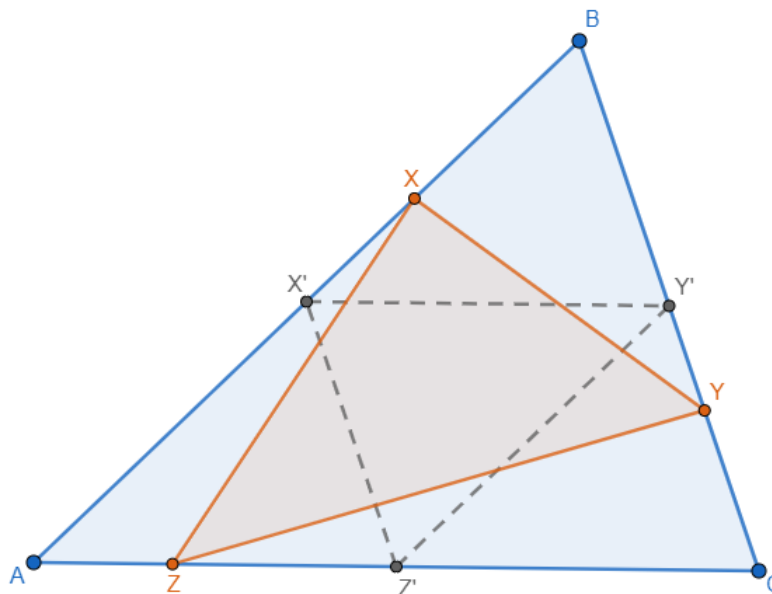
Итак, ребус имеет единственное решение: $29786 + 850 + 850 = 31486$.

Критерии оценивания:

- приведено решение ребуса, но не доказана его единственность – 2 первичных балла;
- приведено решение ребуса, но с ошибками при определении R и/или T – 3 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 3. На плоскости заданы треугольники $\triangle XYZ$ и $\triangle ABC$, причем точка X лежит на отрезке AB ($0 < BX < AX$), точка Y лежит на отрезке BC ($0 < CY < BY$), а точка Z лежит на отрезке CA ($0 < AZ < CZ$). Докажите, что площадь хотя бы одного из треугольников $\triangle AXZ$, $\triangle BXY$, $\triangle CZY$ не превосходит площади треугольника $\triangle XYZ$.

Решение. Кроме $\triangle XYZ$ и $\triangle ABC$ рассмотрим $\triangle X'Y'Z'$, составленный из средних линий $\triangle ABC$. Очевидно, площадь $\triangle X'Y'Z'$ равна $1/4$ площади $\triangle ABC$.



Так как точки X и X' лежат на прямой, параллельной $Y'Z'$, то площадь треугольника $\triangle XY'Z'$ равна площади треугольника $\triangle X'Y'Z'$. Так как треугольники $\triangle XY'Z'$ и $\triangle XYZ'$ имеют общее основание XZ' , но вершина Y' лежит ближе вершины Y к вершине B угла $\angle ABC$, то площадь треугольника $\triangle XY'Z'$ больше площади треугольника $\triangle XYZ'$. Так как треугольники $\triangle XY'Z'$ и $\triangle XYZ$ имеют общее основание XY , но вершина Z' лежит ближе вершины Z к вершине C угла $\angle ACB$, то площадь треугольника $\triangle XYZ$ больше площади треугольника $\triangle XYZ'$.

Подытожим: площадь $\triangle XYZ$ не меньше $1/4$ площади треугольника $\triangle ABC$, поэтому на три треугольника $\triangle AXZ$, $\triangle BXY$ и $\triangle CZY$ приходится не более $3/4$ площади $\triangle ABC$, поэтому хотя бы один из них должен иметь площадь не больше $1/4$ площади $\triangle ABC$ и, следовательно, площадь этого треугольника не больше площади $\triangle XYZ$.

Критерии оценивания:

- предложено сравнить $\triangle XYZ$ со срединным треугольником – 2 первичных балла;

- предложена и частично реализована идея анализа изменения площади при движении точек – 3 первичных балла;
- приведено верное решение, содержащее незначительные недочеты – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 4. Найдите количество положительных правильных (числитель меньше знаменателя) несократимых дробей, для которых произведение числителя и знаменателя равно $45! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 44 \cdot 45$.

Ответ: 8192

Решение. Числитель и знаменатель несократимой дроби взаимно просты, поэтому каждое простое число, встречающееся в разложении числителя на простые множители, не встречается в разложении знаменателя, и наоборот. Число $45!$ представимо в виде произведения простых чисел из множества $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43\}$ в некоторых целых положительных степенях, и каждое разбиение множества P на два непересекающихся подмножества A, B соответствует одной положительной правильной несократимой дроби x/y , в которой числитель и знаменатель – произведения простых чисел из A, B в тех же степенях, в которых они входят в разложение $45!$, причем меньшее произведение – это x , а большее – y .

Подсчитаем количество упомянутых разбиений множества P : ясно, что для каждого простого числа из P есть две возможности – либо оно «попадает» в A , либо в B . Значит, общее число разбиений равно 2^{14} . Осталось заметить, что все разбиения можно разобрать на пары, отличающиеся перестановкой A и B – итого у нас $2^{14}/2 = 8192$ разбиения и столько же нужных дробей.

Критерии оценивания:

- использована идея подсчета на основе количества простых чисел из $[1; 45]$ – 2 первичных балла;
- приведено верное решение, но допущена арифметическая ошибка, либо получен ответ вдвое больше верного – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 5. В окружность вписан многоугольник, не являющийся правильным. Назовем вершину B этого многоугольника *особенной*, если она делит дугу, заключенную между двумя соседними с ней вершинами A, C , не пополам. Каждую минуту одна особенная вершина перемещается в середину своей дуги. Может ли случиться так, что спустя некоторое время мы получим многоугольник, равный исходному?

Ответ: нет, такого быть не может

Решение. Докажем, что для $a \neq b$ выполнено $a^2 + b^2 > 2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Действительно,

$$\begin{aligned} a \neq b &\Rightarrow (a - b)^2 > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > 2ab \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 > a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} > \frac{(a + b)^2}{4} \Rightarrow a^2 + b^2 > 2 \cdot \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Допустим, особенная вершина B делит дугу между соседними вершинами A и C на дуги с длинами a и b . Заметим, что, ввиду доказанного неравенства, сумма квадратов длин дуг, ограниченных соседними вершинами многоугольника, каждую минуту становится меньше. В то же время для равных многоугольников эти суммы квадратов равны, что доказывает невозможность получения

многоугольника, равного исходному.

Критерии оценивания:

- верно найден полуинвариант, но не доказано соответствующее неравенство – 2 первичных балла;
- верно найден полуинвариант и доказано соответствующее неравенство, но допущена ошибка при его использовании – 3 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.