

9 класс

Задача 1. Согласно рассказу А. Конан Дойла «Приключение греческого переводчика», находящимся в помещении «Клуба ‘Диоген’» членам клуба не дозволяется обращать друг на друга хоть какое-то внимание. Но, оказывается (хотя Артур Конан Дойль об этом не писал и не знал), чтобы стать членом этого Клуба, нужна была рекомендация от одного знакомого, уже являющегося членом Клуба. Таким образом, в каждый момент времени своего существования Клуб объединял некоторое количество членов (не менее двух), каждый из которых был знаком с каким-то другим членом Клуба (отношение знакомства всегда взаимно).

1. Докажите, что в каждый момент существования «Клуба ‘Диоген’» среди его членов можно указать двоих, имеющих равное число знакомых среди членов Клуба.
2. Представим, что в некоторый момент времени каждый из n членов Клуба был знаком ровно с 2025 другими членами Клуба. Найдите все возможные значения n .

Ответ: 2. $n \in \{2026, 2028, 2030, 2032, \dots\}$.

Решение.

1. Пусть $n > 1$ – общее число членов Клуба. Разложим имена всех n членов Клуба по $n - 1$ «ящичкам»: имя члена Клуба кладем в ящик с номером $m \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$, если у этого члена Клуба ровно m знакомых членов Клуба ($1 \leq m \leq n - 1$). Но, согласно принципу Дирихле, два имени неизбежно попадут в один ящик – значит, найдутся двое членов Клуба, имеющих равное число знакомых среди других членов Клуба.
2. Построим граф, в котором вершины – члены Клуба, а ребра обозначают отношения знакомства между соответствующими членами. Тогда требуется найти все n , при которых существует граф, степень каждой вершины которого равна 2025. Тогда общее число ребер равно $\frac{2025 \cdot n}{2}$, откуда n должно быть четным. Кроме того, очевидно, $n \geq 2026$. Покажем, что любое четное $n \geq 2026$ удовлетворяет условию, и для этого построим соответствующий граф. Для удобства построения расположим вершины этого графа в вершинах правильного n -угольника, и пусть каждая вершина графа соединена ребрами со своими ближайшими 2024 «соседями» (1012 по часовой стрелке и столько же – против часовой стрелки) и с противоположной вершиной n -угольника (такая существует, поскольку n четно). Очевидно, условие задачи выполняется.

Критерии оценивания:

- приведено верное доказательство п.1 или приведена верная оценка снизу в п.2 – 1 первичный балл;
- приведено верное доказательство п.1 и приведена верная оценка снизу в п.2 – 3 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение обоих пунктов – 5 первичных баллов.

Задача 2. Телефонный номер состоит из 10 цифр (каждая из них может быть любой цифрой от 0 до 9) и имеет вид

$$\square\square\square - \square\square\square\square\square\square\square$$

(первые три цифры будем называть префиксом, а остальные семь цифр – хвостом).

Назовем телефонный номер *красивым*, если в его хвосте найдутся хотя бы две последовательности из трех подряд идущих цифр, совпадающие с префиксом (эти последовательности могут пересекаться). Найдите количество *красивых* телефонных номеров.

Ответ: 93610

Решение. Для префикса возможны несколько случаев (далее разными буквами обозначены разные цифры, одинаковыми – одинаковые, а звездочкой – любая цифра):

- XYZ : тогда хвост выглядит как $XYZ * XYZ$, либо $XYZXYZ*$, $*XYZXYZ$ – для фиксированных попарно различных X, Y, Z существует по 10 вариаций каждого из трех упомянутых хвостов, при этом XYZ можно выбрать одним из $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ способов. Итого $720 \cdot 3 \cdot 10 = 21600$ красивых номеров с префиксом этого типа.
- XXX : тогда хвост выглядит как $XXXXY **$ ($YXXXXY*$, $YXXXXXZ*$, $*YXXXXY$, $*YXXXXXZ$, $**YXXXXX$ – итого $900 + 90 + 720 + 90 + 720 + 900 = 3420$ вариаций), либо $XXXXXXY*$ ($YXXXXXXY$, $YXXXXXXZ$, $*YXXXXXX$ – итого $90 + 9 + 72 + 90 = 261$ вариация), либо $XXXXXXXY$ ($XXXXYXXXX$, $YXXXXXXX$ – итого $9 + 9 + 9 = 27$ вариаций), либо $XXXXXXX$ – 1 вариант. Итого $10 \cdot (3420 + 261 + 27 + 1) = 37090$ красивых номеров с префиксом этого типа.
- XXY или YXX : тогда хвост выглядит как $XXYXXY*$, либо $XXY*XXY$, либо $*XXYXXY$ – по 10 вариаций каждого из трех упомянутых хвостов, при этом XXY можно выбрать одним из $10 \cdot 9 = 90$ способов. Итого $2 \cdot 90 \cdot 3 \cdot 10 = 5400$ красивых номеров с префиксом этого типа.
- XYX : тогда для фиксированных различных X, Y есть следующие варианты для хвоста:
 - $XYXYX **$ (здесь $** \neq YX$): $10^2 - 1 = 99$ вариаций,
 - $*XYXYX*$: $10^2 = 100$ вариаций,
 - $**XYXYX$ (здесь $** \neq XY$): $10^2 - 1 = 99$ вариаций,
 - $XYXXYX*$: 10 вариаций,
 - $XYX*XYX$: 10 вариаций,
 - $*XYXXYX$: 10 вариаций, –

всего $90 \cdot (99 + 100 + 99 + 10 + 10 + 10) = 29520$ красивых номеров с префиксом этого типа.

Подведем итог: существует $21600 + 37090 + 5400 + 29520 = 93610$ красивых номеров.

Критерии оценивания:

- рассмотрены хотя бы 3 различных вида префикса – 1 первичный балл;
- рассмотрены все виды префикса, но при подсчете количества номеров допущена неарифметическая ошибка – 2 первичных балла;
- рассмотрены все виды префикса, но при подсчете количества номеров допущена только арифметическая ошибка – 3 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 3. Точки $A_1, A_2, A_3, \dots$ расположены на прямой l в упомянутом порядке так, что отрезки $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$ равны $1, 3, 5, \dots$, соответственно, и являются основаниями правильных треугольников $A_1A_2B_1, A_2A_3B_2, A_3A_4B_3, \dots$.

Докажите, что точки $B_1, B_2, B_3, \dots$ лежат на параболе, и найдите расстояние от вершины этой параболы до точки A_1 .

Ответ: $1/4$

Решение. Зададимся прямоугольной системой координат, в которой точка A_1 имеет координаты $(0; 0)$, и все точки $A_2, A_3, \dots$ лежат на положительной полуоси абсцисс. Вершины, лежащие напротив оснований треугольников имеют координаты $B_1(0 + 1 \cdot \frac{1}{2}; \pm 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B_2(0 + 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}; \pm 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B_3(0 + 1 + 3 + 5 \cdot \frac{1}{2}; \pm 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})$, ..., $B_n(0 + 1 + 3 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1) \cdot \frac{1}{2}; \pm (2n - 1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})$,

Докажем по индукции, что $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ для $n \geq 1$. База индукции очевидна: $2 \cdot 1 - 1 = 1^2$.

Индукционная гипотеза: для некоторого $n \geq 1$ выполнено $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$. Докажем, что тогда подобное выполнено для $n + 1$, т.е. $1 + 3 + \dots + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$.

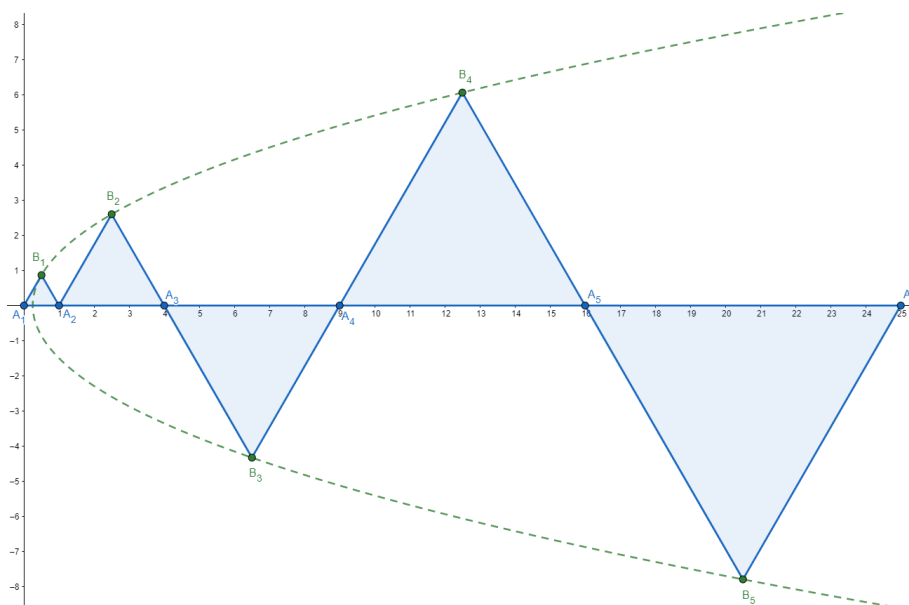
Индукционный шаг:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) &= (1 + 3 + \dots + (2n - 1)) + (2n + 1) = \\ &= (\text{согласно индукционной гипотезе}) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Согласно доказанному, $0 + 1 + 3 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{2n^2 - 2n + 1}{2}$, тогда для каждого $n \geq 1$ точка B_n имеет координаты $(\frac{2n^2 - 2n + 1}{2}; \pm \frac{(2n - 1)\sqrt{3}}{2})$ (знак ординаты зависит от положения треугольника относительно оси абсцисс и, как мы увидим далее, ни на что не повлияет). Уже сейчас видно, что абсцисса зависит от ординаты по квадратичному закону, поэтому точки B_n должны лежать на параболе, но мы убедимся в этом аналитически. Кроме того, уравнение параболы позволит нам быстро вычислить координаты ее вершины.

Итак, пусть $x = \frac{2n^2 - 2n + 1}{2}$, $y = \pm \frac{(2n - 1)\sqrt{3}}{2}$, тогда $n = \frac{3 \pm 2\sqrt{3} \cdot y}{6}$, откуда $x = \frac{2n^2 - 2n + 1}{2} = \frac{1}{3} \cdot y^2 + \frac{1}{4}$ после несложных преобразований. Очевидно, имеем уравнение параболы, симметричной относительно оси абсцисс.



Координаты ее вершины — $(\frac{1}{4}; 0)$, откуда требуемое расстояние от вершины до $A_1(0; 0)$ равно $\frac{1}{4}$.

Критерии оценивания:

- задача решена неверно из-за ошибки в определении уравнения параболы и/или в вычислении координат ее вершины — 2 первичных балла;
- приведено верное решение, не содержащее доказательства $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ — 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение — 5 первичных баллов.

Задача 4. Имеется таблица 100×100 клеток, некоторые из которых отмечены. Всегда ли можно покрасить каждую отмеченную клетку в красный или синий цвет так, чтобы в каждом столбце и каждой строке таблицы было не более двух красных клеток, и при этом каждая синяя клетка располагалась в своей строке и/или столбце между двумя красными (необязательно соседними с ней)?

Решение. Выделим в каждой строке крайнюю левую и крайнюю правую отмеченные клетки, окрасив их в красный цвет. Если в строке есть только одна отмеченная клетка, она считается одновременно и левой, и правой. Все остальные отмеченные клетки окрасим в синий.

Продemonстрируем процесс перекраски клеток, приводящий к нужной раскраске.

Будем считать клетку хорошей, если она либо красная, либо находится между двумя красными клетками (в своей строке) и является синей. Раскраску отметок назовём допустимой, если все клетки являются хорошими. Очевидно, начальная раскраска уже удовлетворяет этому требованию.

Предположим, существует столбец, содержащий три или более красных клеток. Выберем одну из них, за исключением самой верхней и самой нижней, и применим следующую операцию:

- если это единственная красная клетка в строке, перекрасим её в синий;
- если клетка является левой красной в строке, она становится синей, а ближайшая справа отмеченная клетка становится красной (если до того не была таковой);
- если клетка является правой красной в строке, она становится синей, а ближайшая слева отмеченная клетка становится красной (если до того не была таковой).

Докажем, что после выполнения операции раскраска остаётся допустимой. Обозначим клетку, к которой применялась операция, как A .

Клетки, не находящиеся с A в одной строке или столбце, сохраняют свой статус хороших.

В столбце, где расположена A , остаётся как минимум одна красная клетка сверху и одна снизу, что гарантирует, что все клетки в этом столбце по-прежнему хорошие.

В строке, где находится A , все клетки, кроме неё самой, сохраняют свой статус. Что касается A , она остаётся хорошей, так как в её столбце остаются красные клетки выше и ниже.

Таким образом, все получаемые при перекраске раскраски остаются допустимыми.

Теперь докажем, что процесс перекрашивания не может продолжаться бесконечно. Рассмотрим для каждой строки количество клеток между красными и просуммируем эти числа (если в строке нет красных клеток, учтём ноль). Обозначим полученную сумму как S . В ходе операций S либо остаётся неизменным (когда единственная красная клетка в строке становится синей), либо уменьшается на 1. Так как S не может быть отрицательным и не может бесконечно оставаться неизменным, процесс перекраски обязательно завершится.

В итоге, когда перекрашивание закончится, в каждом столбце будет не более двух красных клеток. В любой момент процесса в строках также сохраняется не более двух красных клеток. Следовательно, итоговая раскраска удовлетворяет нужным условиям.

Критерии оценивания:

- приведен способ/алгоритм раскрашивания, но его доказательство отсутствует – 2 первичных балла;
- приведен способ/алгоритм раскрашивания, но его доказательство содержит ошибку – 3 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 5. Даны целые $m > 1$ и $n > 0$ и задано множество $A = \{0, 1, 2, \dots, m^2 - 1\}$. Найдите количество многочленов $P(x)$ с коэффициентами из A , удовлетворяющих равенству $P(m) = n$.

Ответ: $\lfloor n/m \rfloor + 1$

Решение. Пусть $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, где $a_k \in A$ для всех k . Запишем a_k в виде $b_k \cdot m + c_k$ (т.е. в виде не более чем двузначного числа в системе счисления с основанием m), где $b_k, c_k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$. Имеем

$$n = P(m) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k m^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k m^k = m \cdot t + \sum_{k=0}^{\infty} c_k m^k,$$

где $t = \sum_{k=0}^{\infty} b_k m^k$. Любое $0 \leq t \leq \lfloor n/m \rfloor$ можно единственным образом представить в виде $\sum_{k=0}^{\infty} b_k m^k$ (записать в системе счисления с основанием m), аналогично есть единственный способ записать $n - mt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k m^k$.

Из сказанного следует, что можно установить взаимнооднозначное соответствие между подходящими нам многочленами $P(x)$ и множеством $\{0, 1, \dots, \lfloor n/m \rfloor\}$, в котором ровно $\lfloor n/m \rfloor + 1$ элементов.

Критерии оценивания:

- приведено представление многочлена в виде ряда по степеням m – 2 первичных балла;
- помимо условий на 2 первичных балла, доказана единственность указанного представления – 3 первичных балла;
- приведено верное решение, содержащее незначительные недочеты либо арифметические ошибки – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.