

10 класс

Задача 1. Есть два приведенных (то есть с коэффициентом 1 при старшей степени) многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ равных четных степеней с вещественными коэффициентами. Известно, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет вещественных корней. Какие из следующих уравнений имеют, а какие не имеют вещественные корни (хотя бы один корень)?

1. $P(x) = Q(x + 1)$
2. $P(x + 1) = Q(x + 1)$
3. $P(x + 2) = Q(x + 1)$

Задача 2. Множество всех целых положительных чисел разбили на два непересекающихся подмножества – A и B . Докажите, что для любого целого $n > 0$ найдутся такие целые $x > y > n$, что $\{x, y, x + y\} \subseteq A$ или $\{x, y, x + y\} \subseteq B$.

Задача 3. Бесконечная последовательность $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ строится следующим образом: $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, и для $n > 3$

$$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} + a_{n-3}$$

Докажите, что для любого целого $d > 0$ найдется член этой последовательности, кратный d .

Задача 4. За один ход разрешается одновременно заменять все члены последовательности $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ действительных чисел на $|a - x_1|, |a - x_2|, |a - x_3|, \dots, |a - x_n|$, соответственно (число a для разных ходов может быть разным). Докажите, что за конечное число ходов из любой начальной последовательности можно получить последовательность, состоящую только из нулей $(0, 0, 0, \dots, 0)$, и найдите наименьшее число ходов, за которое гарантированно можно этого добиться для фиксированного n .

Задача 5. Точки A, B, C, D расположены на прямой в указанном порядке, причем $AB = 2$, $BC = 1$, $CD = c$. Найдите все положительные c , для каждого из которых найдется такая точка P (не лежащая на прямой AB), что PB, PC – трисектрисы (лучи, делящие угол на три равные части) угла $\angle APD$.