

11 класс

Задача 1. Пусть D – некоторое фиксированное непустое множество, а $f(x, y)$ – функция двух переменных, принимающих значения из D . Известно, что

1. $f(x, f(y, z)) = f(f(x, z), y)$ для любых $x, y, z \in D$,
2. для любых значений $x, z \in D$ существует такое $y \in D$, что $f(x, y) = z$.

Докажите, что существует такое $t \in D$, что $f(t, x) = x$ для всех $x \in D$.

Задача 2. Пусть $b_1, b_2, \dots, b_{2025}$ – неотрицательные числа, и

$$(x + b_1)(x + b_2) \cdots (x + b_{2025}) = a_{2025}x^{2025} + a_{2024}x^{2024} + \cdots + a_1x + a_0$$

Докажите, что $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ для любого $i = 1, 2, 3, \dots, 2024$.

Задача 3. В стране N есть 10 городов, каждая пара которых соединена двусторонним авиа-маршрутом, который обеспечивается одной из двух авиакомпаний. Докажите, что одна из этих авиакомпаний может предложить своим пассажирам два циклических маршрута, каждый из которых проходит по нечетному числу городов, причем ни один город не является частью обоих маршрутов.

Задача 4. Дан остроугольный треугольник ABC , около которого описана окружность Ω и в котором проведены высоты AA_1, CC_1 . Касательные к Ω , проведенные в точках A и C , пересекаются в точке D , и прямая A_1C_1 пересекает прямые CD, AD в точках E, F , соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника DEF касается Ω .

Задача 5. Даны целое $a > 0$, не являющееся целой степенью числа 10, и целое $b > 0$. Верно ли, что существует такое целое $n > 0$, что в десятичной записи числа a^n встречается десятичная запись числа b ? Например, для $a = 2$ и $b = 19$ можно выбрать $n = 13$, т.к. $2^{13} = 8192$, в записи которого есть 19.