

9 класс

Задача 1. Согласно рассказу А. Конан Дойла «Приключение греческого переводчика», находящимся в помещении «Клуба ‘Диоген’» членам клуба не дозволяется обращать друг на друга хоть какое-то внимание. Но, оказывается (хотя Артур Конан Дойль об этом не писал и не знал), чтобы стать членом этого Клуба, нужна была рекомендация от одного знакомого, уже являющегося членом Клуба. Таким образом, в каждый момент времени своего существования Клуб объединял некоторое количество членов (не менее двух), каждый из которых был знаком с каким-то другим членом Клуба (отношение знакомства всегда взаимно).

1. Докажите, что в каждый момент существования «Клуба ‘Диоген’» среди его членов можно указать двоих, имеющих равное число знакомых среди членов Клуба.
2. Представим, что в некоторый момент времени каждый из n членов Клуба был знаком ровно с 2025 другими членами Клуба. Найдите все возможные значения n .

Задача 2. Телефонный номер состоит из 10 цифр (каждая из них может быть любой цифрой от 0 до 9) и имеет вид

$$\square\square\square - \square\square\square\square\square\square$$

(первые три цифры будем называть префиксом, а остальные семь цифр – хвостом).

Назовем телефонный номер *красивым*, если в его хвосте найдутся хотя бы две последовательности из трех подряд идущих цифр, совпадающие с префиксом (эти последовательности могут пересекаться). Найдите количество *красивых* телефонных номеров.

Задача 3. Точки $A_1, A_2, A_3, \dots$ расположены на прямой l в упомянутом порядке так, что отрезки $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$ равны $1, 3, 5, \dots$, соответственно, и являются основаниями правильных треугольников $A_1A_2B_1, A_2A_3B_2, A_3A_4B_3, \dots$.

Докажите, что точки $B_1, B_2, B_3, \dots$ лежат на параболе, и найдите расстояние от вершины этой параболы до точки A_1 .

Задача 4. Имеется таблица 100×100 клеток, некоторые из которых отмечены. Всегда ли можно покрасить каждую отмеченную клетку в красный или синий цвет так, чтобы в каждом столбце и каждой строке таблицы было не более двух красных клеток, и при этом каждая синяя клетка располагалась в своей строке и/или столбце между двумя красными (необязательно соседними с ней)?

Задача 5. Даны целые $m > 1$ и $n > 0$ и задано множество $A = \{0, 1, 2, \dots, m^2 - 1\}$. Найдите количество многочленов $P(x)$ с коэффициентами из A , удовлетворяющих равенству $P(m) = n$.