

10th degree

Task 1.

1. Известно, что есть ровно 2^{2024} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее нечётное число элементов. Чему равно количество элементов множества A ?

There are exactly 2^{2024} ways to select from a finite set A a subset containing an odd number of elements. What is the number of elements in the set A ?

Answer: 2025

2. Известно, что есть ровно 2^{2024} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее чётное (возможное, нулевое) число элементов. Чему равно количество элементов множества A ?

There are exactly 2^{2024} ways to select from a finite set A a subset containing an even (possibly, zero) number of elements. What is the number of elements in the set A ?

Answer: 2025

3. Известно, что есть ровно 2^{101} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее нечётное число элементов. Чему равно количество элементов множества A ?

There are exactly 2^{101} ways to select from a finite set A a subset containing an odd number of elements. What is the number of elements in the set A ?

Answer: 102

4. Известно, что есть ровно 2^{101} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее чётное (возможное, нулевое) число элементов. Чему равно количество элементов множества A ?

There are exactly 2^{101} ways to select from a finite set A a subset containing an even (possibly, zero) number of elements. What is the number of elements in the set A ?

Answer: 102

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Зафиксируем некоторый элемент x множества A . Теперь разобьём все его подмножества на пары, отличающиеся только наличием (либо отсутствием) элемента x . Очевидно, в каждой паре одно подмножество содержит чётное (возможно, нулевое) число элементов, а другое – нечётное число элементов. Таким образом, «чётных» подмножеств столько же, сколько и «нечётных» – значит, если множество A содержит n элементов и, как следствие, 2^n подмножеств (включая пустое), то количество «нечётных» подмножеств равно $2^n : 2 = 2^{n-1}$. По условию это количество равно 2^{2024} ,

откуда $n = 2025$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)*

Lets fix some element x of the set A . Now we divide all its subsets into pairs that differ only in the presence (or absence) of element x . Obviously, in each pair one subset contains an even (possibly zero) number of elements, and the other – an odd number of elements. Thus, there are as many «even» subsets as «odd» ones – by that, if set A contains n elements and (as a consequence) 2^n subsets (including the empty one), then the number of «odd» subsets is $2^n : 2 = 2^{n-1}$. By the task's condition, the number is 2^{2024} , thus $n = 2025$.

Task 2.

1. Даны чашечные весы: они могут абсолютно точно показывать равенство масс грузов на чашах весов, а если массы грузов различны, то показывают, на какой чаше груз тяжелее (но не показывают, на сколько груз тяжелее). Также дан набор гирь, масса каждой из которых – целое положительное число грамм. Про этот набор известно, что число гирь в нем – минимально возможное для того, чтобы определить с помощью этих гирь и чашечных весов массу M (в граммах) груза (M – натуральное число, не превосходящее 41). Найдите минимальную возможную суммарную массу гирь в наборе.

A scale is given: it can absolutely accurately show the equality of the masses of the loads on the scale pans, and if the masses of the loads are different, then it shows on which pan the load is heavier (but does not show how much heavier the load is). Also given a set of weights, the mass of each being a positive integer number of grams. It is known about this set that the number of weights in it is the minimum possible for determining the mass of M grams of the load (M is a natural number not exceeding 41) using these weights and the scale pan. Find the minimum possible total mass of the weights in the set.

Answer: 40

2. Даны чашечные весы: они могут абсолютно точно показывать равенство масс грузов на чашах весов, а если массы грузов различны, то показывают, на какой чаше груз тяжелее (но не показывают, на сколько груз тяжелее). Также дан набор гирь, масса каждой из которых – целое положительное число грамм. Про этот набор известно, что число гирь в нем – минимально возможное для того, чтобы определить с помощью этих гирь и чашечных весов массу M (в граммах) груза (M – натуральное число, не превосходящее 122). Найдите минимальную возможную суммарную массу гирь в наборе.

A scale is given: it can absolutely accurately show the equality of the masses of the loads on the scale pans, and if the masses of the loads are different, then it shows on which pan the load is heavier (but does not show how much heavier the load is). Also given a set of weights, the mass of each being a positive integer number of grams. It is known about this set that the number of weights in it is the minimum possible for determining the mass of M grams of the load (M is a natural number not exceeding 122) using these weights and the scale pan. Find the minimum possible total mass of the weights in the set.

Answer: 121

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)
См. решение задачи 11.6.

Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)
See the solution of the task 11.6.

Task 3.

1. Рассмотрим рекурсивный алгоритм для неотрицательных целых a, b, c :

$$F(a, b, c) = \begin{cases} c, & \text{если } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{если } b \text{ четное} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{если } b \text{ нечетное} \end{cases}$$

Решите уравнение: $F(x, x, x) = 110$.

Consider a recursive algorithm for non-negative integers a, b, c :

$$F(a, b, c) = \begin{cases} c, & \text{if } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{if } b \text{ is even} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{if } b \text{ is odd} \end{cases}$$

Solve the equation: $F(x, x, x) = 110$.

Answer: 10

2. Рассмотрим рекурсивный алгоритм для неотрицательных целых a, b, c :

$$F(a, b, c) = \begin{cases} c, & \text{если } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{если } b \text{ четное} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{если } b \text{ нечетное} \end{cases}$$

Решите уравнение: $F(x, x, x) = 240$.

Consider a recursive algorithm for non-negative integers a, b, c :

$$F(a, b, c) = \begin{cases} c, & \text{if } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{if } b \text{ is even} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{if } b \text{ is odd} \end{cases}$$

Solve the equation: $F(x, x, x) = 240$.

Answer: 15

3. Рассмотрим рекурсивный алгоритм для неотрицательных целых a, b, c :

$$F(a, b, c) = \begin{cases} c, & \text{если } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{если } b \text{ четное} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{если } b \text{ нечетное} \end{cases}$$

Решите уравнение: $F(x, x, x) = 90$.

Consider a recursive algorithm for non-negative integers a, b, c :

$$F(a, b, c) = \begin{cases} c, & \text{if } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{if } b \text{ is even} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{if } b \text{ is odd} \end{cases}$$

Solve the equation: $F(x, x, x) = 90$.

Answer: 9

4. Рассмотрим рекурсивный алгоритм для неотрицательных целых a, b, c :

$$F(a, b, c) = \begin{cases} c, & \text{если } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{если } b \text{ четное} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{если } b \text{ нечетное} \end{cases}$$

Решите уравнение: $F(x, x, x) = 182$.

Consider a recursive algorithm for non-negative integers a, b, c :

$$F(a, b, c) = \begin{cases} c, & \text{if } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{if } b \text{ is even} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{if } b \text{ is odd} \end{cases}$$

Solve the equation: $F(x, x, x) = 182$.

Answer: 13

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Докажем индукцией по $b \geq 0$ следующее утверждение: $F(a, b, c) = ab + c$. База индукции: $F(a, 0, c) = c = a \cdot 0 + c = c$.

Пусть для некоторого $b \geq 0$ имеет место $F(a, k, c) = ak + c$ для всех $0 \leq k \leq b$. Вычислим $F(a, b+1, c)$:

Если $b+1$ чётно, то $b+1 = 2k$, где $0 \leq k \leq b$. Тогда $F(a, b+1, c) = F(a, 2k, c) = F(2a, k, c) = 2a \cdot k + c = a(b+1) + c$.

Если $b+1$ нечётно, то $b+1 = 2k+1$, где $0 \leq k \leq b$. Тогда $F(a, b+1, c) = F(a, 2k+1, c) = F(2a, k, c+a) = 2a \cdot k + c + a = a(b+1) + c$.

Следовательно, $F(a, b, c) = ab + c$ для всех $b \geq 0$, и потому $F(a, a, a) = a^2 + a$. Значит, уравнение $F(x, x, x) = 110$ приводится к виду $x^2 + x = 110$, и единственный его целый неотрицательный корень – число 10.

Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

Lets prove the following statement by induction on $b \geq 0$: $F(a, b, c) = ab + c$. Base of the induction: $F(a, 0, c) = c = a \cdot 0 + c = c$.

Let for some $b \geq 0$ we have $F(a, k, c) = ak + c$ for all $0 \leq k \leq b$. We calculate $F(a, b+1, c)$:

If $b+1$ is even, then $b+1 = 2k$, where $0 \leq k \leq b$. Then $F(a, b+1, c) = F(a, 2k, c) = F(2a, k, c) =$

$$2a \cdot k + c = a(b + 1) + c.$$

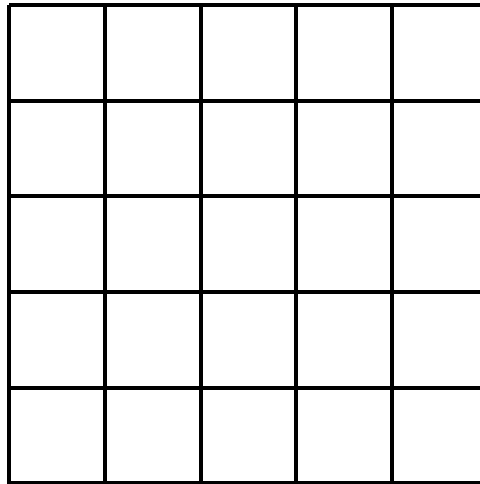
If $b + 1$ is odd, then $b + 1 = 2k + 1$, where $0 \leq k \leq b$. Then $F(a, b + 1, c) = F(a, 2k + 1, c) = F(2a, k, c + a) = 2a \cdot k + c + a = a(b + 1) + c$.

Therefore, $F(a, b, c) = ab + c$ for all $b \geq 0$, thus $F(a, a, a) = a^2 + a$. By that, the equation $F(x, x, x) = 110$ is reduced to the form $x^2 + x = 110$, and its only non-negative integer root is 10.

Task 4.

1. Город N состоит из 5×5 кварталов, каждый из которых – квадрат со стороной 100 метров (стороны квадратов – это улицы). Найдите наименьшую возможную длину пути, проходящего по каждой улице города N хотя бы по одному разу. Ответ дайте в метрах.

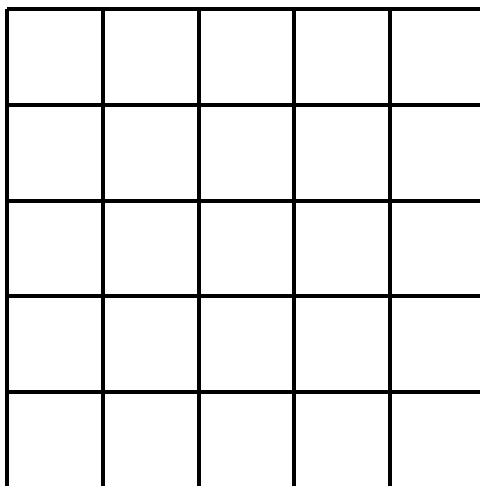
Town N has 5×5 blocks, each of them being a square with a side of 100 meters (the sides of the squares are streets). Find the shortest possible length of a path that passes through each street of the town at least once. Give your answer in meters.



Answer: 6700

2. Город N состоит из 5×5 кварталов, каждый из которых – квадрат со стороной 200 метров (стороны квадратов – это улицы). Найдите наименьшую возможную длину пути, проходящего по каждой улице города N хотя бы по одному разу. Ответ дайте в метрах.

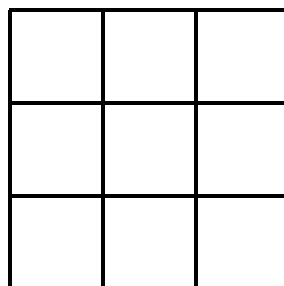
Town N has 5×5 blocks, each of them being a square with a side of 200 meters (the sides of the squares are streets). Find the shortest possible length of a path that passes through each street of the town at least once. Give your answer in meters.



Answer: 13400

3. Город N состоит из 3×3 кварталов, каждый из которых – квадрат со стороной 100 метров (стороны квадратов – это улицы). Найдите наименьшую возможную длину пути, проходящего по каждой улице города N хотя бы по одному разу. Ответ дайте в метрах.

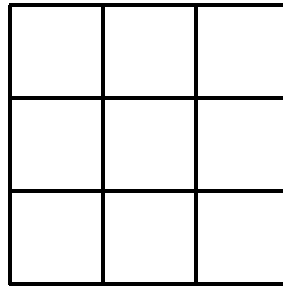
Town N has 3×3 blocks, each of them being a square with a side of 100 meters (the sides of the squares are streets). Find the shortest possible length of a path that passes through each street of the town at least once. Give your answer in meters.



Answer: 2700

4. Город N состоит из 3×3 кварталов, каждый из которых – квадрат со стороной 200 метров (стороны квадратов – это улицы). Найдите наименьшую возможную длину пути, проходящего по каждой улице города N хотя бы по одному разу. Ответ дайте в метрах.

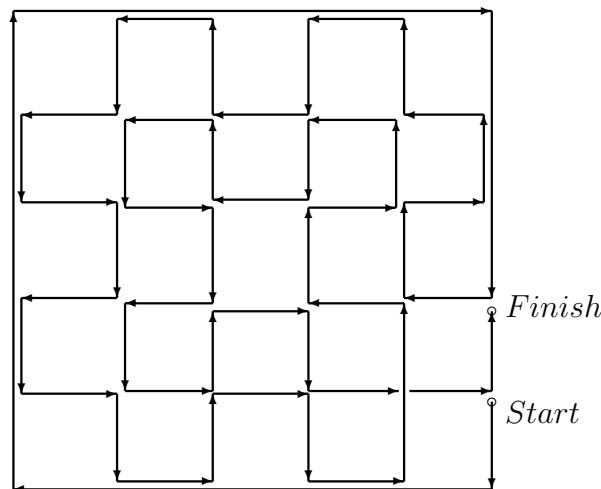
Town N has 3×3 blocks, each of them being a square with a side of 200 meters (the sides of the squares are streets). Find the shortest possible length of a path that passes through each street of the town at least once. Give your answer in meters.



Answer: 5400

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

В городе N есть 60 отрезков улиц длиной по 100 метров каждый. Представим сеть улиц в виде плоского графа, где ребра – упомянутые отрезки, а вершины – перекрестки (в т.ч. перекрестки двух отрезков улиц в углах города), и заметим, что в этом графе 16 вершин нечетной степени. Две из них могут быть соответственно началом и концом пути, а остальные 14 придется посетить как минимум дважды, т.е. придется пройти дважды как минимум по 7 ребрам (по одному на две «соседние» вершины нечетной степени), поэтому минимальное количество пройденных ребер не может быть меньше $60 + 7 = 67$, и тогда общая длина соответствующих отрезков улиц составляет не меньше 6700 метров. Соответствующий пример обхода приведен на рисунке.



Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

In the town N there are 60 street segments, each 100 meters long. Lets represent the street web as a planar graph, where the edges are the street segments mentioned, and the vertices are intersections (including intersections of two street segments at the corners of the city), and note that this graph has 16 vertices of odd degree. Two of them can be the beginning and end of the path, respectively, and the remaining 14 must be visited at least twice, i.e. it is necessary to traverse at least 7 edges twice (one for two adjacent vertices of odd degree), therefore the minimum number of edges traversed cannot be less than $60 + 7 = 67$, then the total length of the corresponding street segments is not less than 6700 meters. The corresponding example is shown on the picture above.

Task 5. Некоторая бесконечная последовательность натуральных чисел обладает следующим свойством: для любого целого положительного n среднее арифметическое первых $n + 1$ членов этой последовательности отличается от среднего арифметического ее первых n членов на одно и то же целое положительное число. Также известно, что некоторый член этой последовательности равен сумме всех предыдущих членов.

Сколько существует различных последовательностей, удовлетворяющих описанному выше условиям и содержащих число 2024? Обоснуйте свой ответ.

Some infinite sequence of positive integers has the following property: for any n , the arithmetic mean of the first $n + 1$ terms of this sequence differs from the arithmetic mean of its first n terms by the same positive integer. It is also known that some term of this sequence is equal to the sum of all previous terms.

How many different sequences are there that satisfy the conditions described above and contain the number 2024? Explain your answer.

Answer: 12

Решение (RUS). Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots$ – произвольная (фиксированная) последовательность, обладающая свойствами, описанных в условиях задачи; для упрощения обозначений обозначим первый элемент этой последовательности a (то есть $a_1 = a$). Для любого натурального n обозначим S_n сумму первых n членов последовательности; в частности, $S_1 = a_1 = a$.

По условию задачи, для любого натурального n имеем $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n}$ – это некоторая положительная целая константа, обозначим ее через d ; следовательно, $\frac{S_1}{1}, \frac{S_2}{2}, \frac{S_3}{3}, \dots$ – целочисленная арифметическая прогрессия: $\frac{S_n}{n} = a + (n-1)d$ и $S_n = na + n(n-1)d$. Поэтому для любого натурального n получаем $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = ((n+1)a + (n+1)nd) - (na + n(n-1)d) = a + 2nd$ и $a_n = a + 2(n-1)d$.

По условию задачи, для некоторого натурального k выполнено $S_k = a_{k+1}$, то есть $ka + k(k-1)d = a + 2kd$ или $(k-1)a = k(3-k)d$; так как a и d – целые положительные числа, то $k = 2$, откуда $a = 2d$, и для любого натурального n получаем $a_n = a + 2(n-1)d = a + (n-1)a = na$.

В таком случае, $a_m = 2024$ (для некоторого натурального m) означает, что $ma = 2md = 2024$. Следовательно, число возможных значений m равно количеству натуральных делителей числа $2024/2 = 2^2 \cdot 11 \cdot 23$, т.е. $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Критерии оценивания:

- получена рекуррентная формула общего члена последовательности, но с ошибкой – 1 первичный балл;
- получена рекуррентная формула общего члена последовательности без ошибок – 2 первичных балла;
- доказано, что только третий член последовательности может быть равен сумме предыдущих – 3 первичных балла;
- верно выполнены предыдущие пп., ответ вычислен с незначительной ошибкой – 4 первичных балла;
- верно выполнены предыдущие пп. и получен верный ответ – 5 первичных баллов.

Solution (ENG). Let $a_1, a_2, a_3, \dots$ be an arbitrary (fixed) sequence with the properties described in the task's formulation; to simplify the notation, we denote the first element of the sequence by a (by that, $a_1 = a$). For any positive integer n we denote by S_n the sum of the first n terms of the sequence; in particular, $S_1 = a_1 = a$.

For any positive integer n we have $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n}$ – this is some positive integer constant, we denote it by d ; therefore, $\frac{S_1}{1}, \frac{S_2}{2}, \frac{S_3}{3}, \dots$ is an integer arithmetic progression: $\frac{S_n}{n} = a + (n-1)d$ and $S_n = na + n(n-1)d$. Therefore, for any positive integer n we obtain $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = ((n+1)a + (n+1)nd) - (na + n(n-1)d) = a + 2nd$ and $a_n = a + 2(n-1)d$.

For some positive integer k we have $S_k = a_{k+1}$, thus $ka + k(k-1)d = a + 2kd$ or $(k-1)a = k(3-k)d$; since a and d are positive integers, then $k = 2$, whence $a = 2d$, and for any positive integer n we obtain $a_n = a + 2(n-1)d = a + (n-1)a = na$.

In this case, $a_m = 2024$ (for some natural m) means that $ma = 2md = 2024$. By that, the number of possible values of m is equal to the number of positive integer divisors of $2024/2 = 2^2 \cdot 11 \cdot 23$ which is $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Criteria:

- a non-recurrent formula for the general term of the sequence was obtained, but with an error – 1 pre-point;
- a non-recurrent formula for the general term of the sequence was obtained without errors – 2 pre-points;
- it was proven that only the third term of the sequence can be equal to the sum of the previous ones – 3 pre-points;
- the previous steps were completed correctly, the answer was calculated with a minor error – 4 pre-points;
- the previous steps were completed correctly and the correct answer was obtained – 5 pre-points.

Task 6. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, расположенные так, что $BC \parallel B_1C_1$, $AC \parallel A_1C_1$, и точки A, B, A_1, B_1 лежат на одной прямой. Пусть описанные окружности треугольников A_1BC и AB_1C пересекаются в точках P, Q . Докажите, что точки P, Q, C_1 лежат на одной прямой.

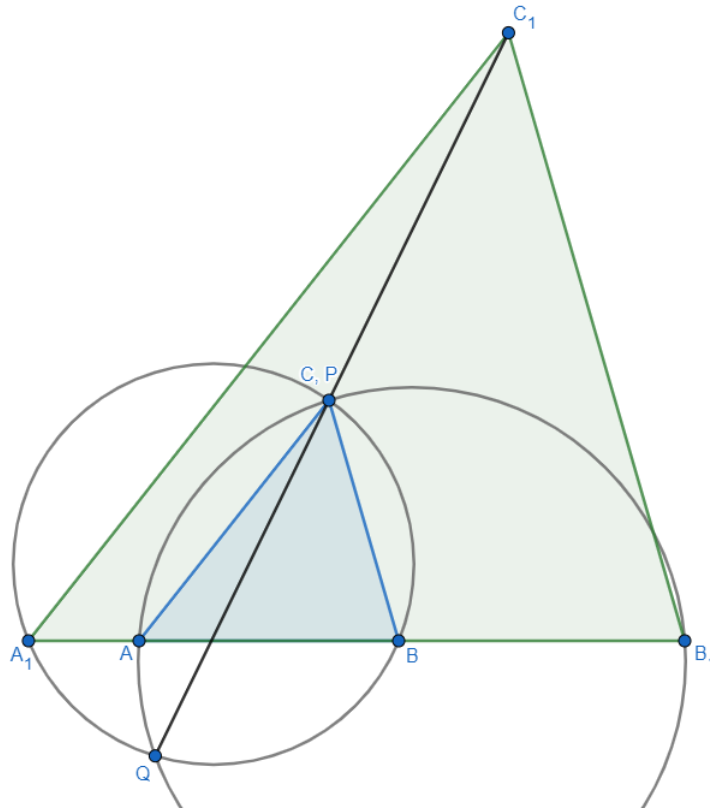
Given triangles ABC and $A_1B_1C_1$ located in such way that $BC \parallel B_1C_1$, $AC \parallel A_1C_1$, and points A, B, A_1, B_1 lie on a line. Let the circumscribed circles of triangles A_1BC and AB_1C intersect at points P, Q . Prove that points P, Q, C_1 lie on a line.

Решение (RUS). Ясно, что одна из общих точек упомянутых в условии окружностей – это точка C , поэтому пусть P – ее второе имя, а точка Q – вторая точка пересечения этих окружностей.

Тогда $\angle ACQ = \angle AB_1Q$ и $\angle QCB = \angle QA_1B$. Поэтому $\angle A_1C_1B_1 = \angle ACB = \angle ACQ + \angle QCB = \angle AB_1Q + \angle QA_1B = \angle A_1QB_1$, т.е. точки A_1, B_1, C_1 и Q лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle A_1C_1Q = \angle A_1B_1Q = \angle ACQ$. Учитывая, что $A_1C_1 \parallel AC$, получаем требуемое.

Критерии оценивания:

- приведена потенциально плодотворная идея доказательства, но с серьезной ошибкой в рассуждениях – 2 первичных балла;
- приведена потенциально плодотворная идея доказательства, но с ошибкой в вычислениях – 3 первичных балла;
- в доказательстве содержатся только незначительные ошибки – 4 первичных балла;
- полностью верное доказательство – 5 первичных баллов.



Then $\angle ACQ = \angle AB_1Q$ and $\angle QCB = \angle QA_1B$. By that, $\angle A_1C_1B_1 = \angle ACB = \angle ACQ + \angle QCB = \angle AB_1Q + \angle QA_1B = \angle A_1QB_1$, i.e. points A_1, B_1, C_1 and Q lie on the same circle. Thus, $\angle A_1C_1Q = \angle A_1B_1Q = \angle ACQ$. Considering that $A_1C_1 \parallel AC$, we obtain the required conclusion.

Criteria:

- a potentially fruitful idea for a proof is given, but it contains a serious error in reasoning – 2 pre-points;
- a potentially fruitful idea for a proof is given, but it contains an error in calculations – 3 pre-points;
- the proof contains only minor errors – 4 pre-points;
- a completely correct proof – 5 pre-points.