

10th degree

Task 1.

1. Даны точка A и прямая l , по которой с постоянной скоростью движется точка B . Длины отрезка AB в моменты времени 0, 1, 5 равны соответственно 1, 1, $\sqrt{3}$. Найдите длину отрезка AB в момент времени 10. Представьте ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.

Given a point A and a line l along which a point B moves at a constant speed. The lengths of the segment AB at times 0, 1, 5 are 1, 1, $\sqrt{3}$, respectively. Find the length of the segment AB at time 10. Express your answer as an integer or a decimal fraction, rounded to hundredths if necessary.

Answer: 3.16

2. Даны точка A и прямая l , по которой с постоянной скоростью движется точка B . Длины отрезка AB в моменты времени 0, 1, 5 равны соответственно 1, 1, $\sqrt{5}$. Найдите длину отрезка AB в момент времени 10. Представьте ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.

Given a point A and a line l along which a point B moves at a constant speed. The lengths of the segment AB at times 0, 1, 5 are 1, 1, $\sqrt{5}$, respectively. Find the length of the segment AB at time 10. Express your answer as an integer or a decimal fraction, rounded to hundredths if necessary.

Answer: 4.36

3. Даны точка A и прямая l , по которой с постоянной скоростью движется точка B . Длины отрезка AB в моменты времени 0, 1, 5 равны соответственно 1, $\sqrt{3}$, 5. Найдите длину отрезка AB в момент времени 10. Представьте ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.

Given a point A and a line l along which a point B moves at a constant speed. The lengths of the segment AB at times 0, 1, 5 are 1, $\sqrt{3}$, 5, respectively. Find the length of the segment AB at time 10. Express your answer as an integer or a decimal fraction, rounded to hundredths if necessary.

Answer: 9.17

4. Даны точка A и прямая l , по которой с постоянной скоростью движется точка B . Длины отрезка AB в моменты времени 0, 1, 5 равны соответственно 1, $\sqrt{3}$, 7. Найдите длину отрезка AB в момент времени 10. Представьте ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.

Given a point A and a line l along which a point B moves at a constant speed. The lengths of the segment AB at times 0, 1, 5 are 1, $\sqrt{3}$, 7, respectively. Find the length of the segment AB at time 10. Express your answer as an integer or a decimal fraction, rounded to hundredths if necessary.

Answer: 13.86

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Отметим, что квадрат длины отрезка AB меняется по квадратичному закону $f(t) = at^2 + bt + c$, что следует из теоремы Пифагора для треугольника ABC , где C – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую l .

Согласно условию задачи, $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(5) = 3$, тогда, согласно формуле Лагранжа имеем

$$f(t) = 1 \cdot \frac{(x-1)(x-5)}{(0-1)(0-5)} + 1 \cdot \frac{x(x-5)}{(1-0)(1-5)} + 3 \cdot \frac{x(x-1)}{(5-0)(5-1)} = 0.1x^2 - 0.1x + 1,$$

откуда $f(10) = 10$. Наконец, $\sqrt{10} \approx 3.16$.

Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

Note that the square of the length of the segment AB changes according to a quadratic law $f(t) = at^2 + bt + c$, which follows from the Pythagorean theorem for triangle ABC , where C is the base of the perpendicular dropped from point A to the line l .

According to the task's formulation, $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(5) = 3$, then after applying the Lagrange formula, we have

$$f(t) = 1 \cdot \frac{(x-1)(x-5)}{(0-1)(0-5)} + 1 \cdot \frac{x(x-5)}{(1-0)(1-5)} + 3 \cdot \frac{x(x-1)}{(5-0)(5-1)} = 0.1x^2 - 0.1x + 1,$$

thus $f(10) = 10$. Finally, $\sqrt{10} \approx 3.16$.

Task 2.

1. Сколько есть целых положительных $n \leq 2025$, для которых десятичная запись числа $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ оканчивается на 9?

How many positive integers $n \leq 2025$ make decimal notation of the number $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ end with 9?

Answer: 506

2. Сколько есть целых положительных $n \leq 2025$, для которых десятичная запись числа $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ оканчивается на 5?

How many positive integers $n \leq 2025$ make decimal notation of the number $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ end with 5?

Answer: 1519

3. Сколько есть целых положительных $n \leq 1000$, для которых десятичная запись числа $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ оканчивается на 9?

How many positive integers $n \leq 1000$ make decimal notation of the number $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ end with 9?

Answer: 250

4. Сколько есть целых положительных $n \leq 1000$, для которых десятичная запись числа $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ оканчивается на 5?

How many positive integers $n \leq 1000$ make decimal notation of the number $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ end with 5?

Answer: 750

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Рассмотрим последние цифры каждого слагаемого при $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

n	1	2	3	4	5
1^n	1	1	1	1	1
2^n	2	4	8	6	2
3^n	3	9	7	1	3
4^n	4	6	4	6	4
5^n	5	5	5	5	5

Значит, последняя цифра суммы $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ повторяется с периодом 4. Очевидно, что в каждой четверке подряд идущих целых положительных n найдется ровно одно, для которого упомянутая сумма оканчивается на 9 – значит, среди чисел $1, 2, 3, \dots, 2025$ таких чисел будет ровно 506 (4, 8, 12, $\dots$, 2024).

Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

Lets consider the last digits of each term for $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

n	1	2	3	4	5
1^n	1	1	1	1	1
2^n	2	4	8	6	2
3^n	3	9	7	1	3
4^n	4	6	4	6	4
5^n	5	5	5	5	5

Then the last digit of the sum $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ is repeated with a period of 4. Obviously, in each four consecutive positive integers n there is exactly one for which the sum ends with 9 – by that, among the numbers $1, 2, 3, \dots, 2025$ there will be exactly 506 such numbers (4, 8, 12, $\dots$, 2024).

Task 3.

1. Царь вешает на сундук с государственной казной n замков и раздает ключи своим 10 советникам так, чтобы никакие 5 из них не могли открыть сундук, но любые 6 – могли (у царя есть множество ключей от каждого замка, и советник может получить ключи от нескольких замков). Найдите наименьшее n , при котором царь сможет добиться желаемого.

The king hangs n locks on the chest with the state treasury and distributes the keys to his 10 advisors so that no 5 of them can open the chest, but any 6 can (the king has many keys to each lock, and an advisor can receive keys to several locks). Find the smallest n at which the king can achieve the goal.

Answer: 252

2. Царь вешает на сундук с государственной казной n замков и раздает ключи своим 11 советникам так, чтобы никакие 5 из них не могли открыть сундук, но любые 6 – могли (у царя есть множество ключей от каждого замка, и советник может получить ключи от нескольких замков). Найдите наименьшее n , при котором царь сможет добиться желаемого.

The king hangs n locks on the chest with the state treasury and distributes the keys to his 11 advisors so that no 5 of them can open the chest, but any 6 can (the king has many keys to each lock, and an advisor can receive keys to several locks). Find the smallest n at which the king can achieve the goal.

Answer: 462

3. Царь вешает на сундук с государственной казной n замков и раздает ключи своим 10 советникам так, чтобы никакие 4 из них не могли открыть сундук, но любые 5 – могли (у царя есть множество ключей от каждого замка, и советник может получить ключи от нескольких замков). Найдите наименьшее n , при котором царь сможет добиться желаемого.

The king hangs n locks on the chest with the state treasury and distributes the keys to his 10 advisors so that no 4 of them can open the chest, but any 5 can (the king has many keys to each lock, and an advisor can receive keys to several locks). Find the smallest n at which the king can achieve the goal.

Answer: 210

4. Царь вешает на сундук с государственной казной n замков и раздает ключи своим 11 советникам так, чтобы никакие 7 из них не могли открыть сундук, но любые 8 – могли (у царя есть множество ключей от каждого замка, и советник может получить ключи от нескольких замков). Найдите наименьшее n , при котором царь сможет добиться желаемого.

The king hangs n locks on the chest with the state treasury and distributes the keys to his 11 advisors so that no 7 of them can open the chest, but any 8 can (the king has many keys to each lock, and an advisor can receive keys to several locks). Find the smallest n at which the king can achieve the goal.

Answer: 330

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Поскольку никакие 5 советников не могут открыть всех замков, у них нет ключа от некоторого замка, но этот ключ есть у всех остальных советников. Значит, ключи от каждого замка должны быть ровно у $10 - 5 = 5$ советников, тогда количество замков не может быть меньше $C_{10}^5 = 252$. Остается только раздать по 5 ключей от каждого замка соответствующей пятерке советников, в результате чего царь добьется желаемого. Если раздать ключи от каждого замка не более чем 4 советникам, то не выполнится условие задачи, т.к. найдутся 6 советников, которые не смогут

открыть определенный замок. Если же раздать ключи от каждого замка более чем 5 советникам, то не выполнится условие «никакие 5 не смогут открыть сундук».

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)*

Since no 5 advisors can open all the locks, they do not have a key to some lock, but all the other advisers have such key. This means that exactly $10 - 5 = 5$ advisors must have keys to each lock, then the number of locks cannot be less than $C_{10}^5 = 252$. It remains to distribute 5 keys to each lock to the corresponding five advisors, and by that the king will achieve what he wants. If the king distributes the keys to each lock to no more than 4 advisors, then the task's requirements will not be fulfilled, because there will be 6 advisors who will not be able to open a certain lock. If the king distributes the keys to each lock to more than 5 advisors, then the requirement «no 5 advisors will be able to open the chest» will not be fulfilled.

Task 4.

1. Решите уравнение

$$(4 \sin x + 3 \cos x)(2.5 \cos 2x + 8 \sin x + 20.5) = 131$$

и запишите в ответ сумму тангенсов тех корней этого уравнения, которые принадлежат отрезку $[0; 2\pi]$, представив ее в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых. Если эта сумма бесконечна, запишите в ответ число -1 .

Solve the equation

$$(4 \sin x + 3 \cos x)(2.5 \cos 2x + 8 \sin x + 20.5) = 131$$

and write down the sum of the tangents of those roots of the equation that belong to the segment $[0; 2\pi]$, representing it as an integer or a decimal fraction, rounded to hundredths if necessary. If the sum is infinite, write down the number -1 as your answer.

Answer: 1.33

2. Решите уравнение

$$(3 \sin x + 4 \cos x)(2.5 \cos 2x + 6 \sin x + 16.5) = 104$$

и запишите в ответ сумму тангенсов тех корней этого уравнения, которые принадлежат отрезку $[0; 2\pi]$, представив ее в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых. Если эта сумма бесконечна, запишите в ответ число -1 .

Solve the equation

$$(3 \sin x + 4 \cos x)(2.5 \cos 2x + 6 \sin x + 16.5) = 104$$

and write down the sum of the tangents of those roots of the equation that belong to the segment $[0; 2\pi]$, representing it as an integer or a decimal fraction, rounded to hundredths if necessary. If the sum is infinite, write down the number -1 as your answer.

Answer: 0.75

3. Решите уравнение

$$(4 \sin x + 3 \cos x)(2.5 \cos 2x + 8 \sin x + 23.5) = 146$$

и запишите в ответ сумму тангенсов тех корней этого уравнения, которые принадлежат отрезку $[0; 2\pi]$, представив ее в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых. Если эта сумма бесконечна, запишите в ответ число -1 .

Solve the equation

$$(4 \sin x + 3 \cos x)(2.5 \cos 2x + 8 \sin x + 23.5) = 146$$

and write down the sum of the tangents of those roots of the equation that belong to the segment $[0; 2\pi]$, representing it as an integer or a decimal fraction, rounded to hundredths if necessary. If the sum is infinite, write down the number -1 as your answer.

Answer: 1.33

4. Решите уравнение

$$(3 \sin x + 4 \cos x)(2.5 \cos 2x + 6 \sin x + 21.5) = 129$$

и запишите в ответ сумму тангенсов тех корней этого уравнения, которые принадлежат отрезку $[0; 2\pi]$, представив ее в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых. Если эта сумма бесконечна, запишите в ответ число -1 .

Solve the equation

$$(3 \sin x + 4 \cos x)(2.5 \cos 2x + 6 \sin x + 21.5) = 129$$

and write down the sum of the tangents of those roots of the equation that belong to the segment $[0; 2\pi]$, representing it as an integer or a decimal fraction, rounded to hundredths if necessary. If the sum is infinite, write down the number -1 as your answer.

Answer: 0.75

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Преобразуем уравнение к виду $5(\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x)(-5 \sin^2 x + 8 \sin x + 23) = 131$ и заметим, что $\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x = \cos(x - \arccos \frac{3}{5}) \leq 1$. Для последнего множителя левой части равенства обозначим $f(t) = -5t^2 + 8t + 23$ (здесь $t = \sin x \in [-1; 1]$), тогда $f(t)$ положительна и принимает наибольшее значение $f(\frac{-8}{2 \cdot (-5)}) = \frac{131}{5}$ для $\sin x = \frac{4}{5}$.

Итак, левая часть равенства не превосходит $5 \cdot 1 \cdot \frac{131}{5} = 131$ и принимает это значение только при $x = \arccos \frac{3}{5} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) (на отрезке $[0; 2\pi]$ есть только одна такая точка). Тогда $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3} \approx 1.33$.

Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

We transform the equation to the form $5(\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x)(-5 \sin^2 x + 8 \sin x + 23) = 131$ and note that $\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x = \cos(x - \arccos \frac{3}{5}) \leq 1$. For the last factor on the left side of the equality, we denote $f(t) = -5t^2 + 8t + 23$ (here $t = \sin x \in [-1; 1]$), then $f(t)$ is positive and takes the largest value $f(\frac{-8}{2 \cdot (-5)}) = \frac{131}{5}$ when $\sin x = \frac{4}{5}$.

So, the left side of the equality does not exceed $5 \cdot 1 \cdot \frac{131}{5} = 131$ and takes this value only for $x = \arccos \frac{3}{5} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) (there is only one such point on the segment $[0; 2\pi]$). Then $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3} \approx 1.33$.

Task 5. На отрезке $[0, 100]$ несколько попарно непересекающихся интервалов вида (a, b) покрашены в красный цвет так, что нет пары красных точек, расстояние между которыми равно 1. Найдите наибольшую возможную суммарную длину покрашенных интервалов. Обоснуйте свой ответ.

On the segment $[0, 100]$ several pairwise non-intersecting intervals of the form (a, b) are colored red in such way that there is no pair of red points with distance 1 from each other. Find the greatest possible total length of the colored intervals. Explain your answer.

Answer: 50

Решение (RUS). Рассмотрим множество отрезков вида $S_k = [k; k+1]$ для $k = 0, 1, 2, \dots, 99$ и обозначим за A_k множество красных точек, принадлежащих S_k . Заметим, что параллельный перенос каждого A_{2t} на 1 «вправо» не даст совпадений перенесенного множества со множеством A_{2t+1} , иначе нашлись бы две красные точки на расстоянии 1 друг от друга – а значит, суммарная длина интервалов, составляющих множества A_{2t} и A_{2t+1} (для любого $t \in \{0, 1, 2, \dots, 49\}$), не превосходит 1. Из этого следует, что суммарная длина покрашенных интервалов не превосходит 50.

Приведем пример покрашенных интервалов, удовлетворяющих условию задачи, сумма длин которых равна 50: пусть $A_{2t} = (2t, 2t + 0.5)$, $A_{2t+1} = (2t + 1.5, 2t + 2)$ для всех $t \in \{0, 1, 2, \dots, 49\}$.

Критерии оценивания:

- Либо:
 - + замечено, что на одну красную точку приходится одна не красная: +2 первичных балла;
 - + приведено разбиение точек на пары: +2 первичных балла;
- Либо:
 - + показано, что длина красного интервала не превосходит 1: +2 первичных балла;
 - + показано, что расстояние между красными интервалами не может быть меньше 1, и приведена верная оценка: +2 первичных балла;
- дан верный пример: +1 первичный балл;
- приведена идея «если красных точек на отрезке длины 2 больше половины, тогда найдутся такие красные точки a, b , что $a - b = 1$ », но нет достаточного обоснования: -1 первичный балл;
- допущена ошибка со включением/невключением точки в интервал: -1 первичный балл;
- не приведена явная оценка суммарной длины красных интервалов: -1 первичный балл.

Solution (ENG). Consider the set of segments of the form $S_k = [k; k+1]$ for $k = 0, 1, 2, \dots, 99$ and denote by A_k the set of red points lying in S_k . Note that the parallel translation of each A_{2t} by 1 «to the right» will not give coincidences of the translated set with the set A_{2t+1} , otherwise there would be two red points at a distance of 1 from each other – therefore the total length of the intervals that make up the sets A_{2t} and A_{2t+1} (for any $t \in \{0, 1, 2, \dots, 49\}$) does not exceed 1. By that, the total length of the colored intervals does not exceed 50.

Lets give an example of colored intervals satisfying the task's conditions, the sum of whose lengths is equal to 50: let $A_{2t} = (2t, 2t + 0.5)$, $A_{2t+1} = (2t + 1.5, 2t + 2)$ for all $t \in \{0, 1, 2, \dots, 49\}$.

Criteria:

- Either
 - + it is noted that there is one non-red point for every red point: +2 pre-points;
 - + the points are divided into pairs: +2 pre-points;
- Or

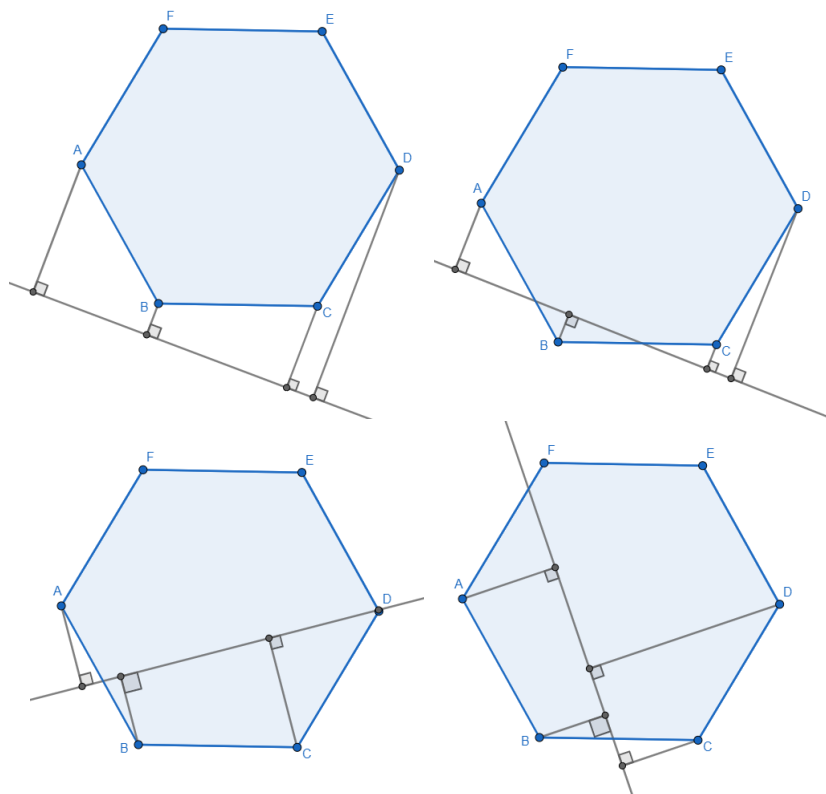
- + it is shown that the length of a red interval does not exceed 1: +2 pre-points;
- + it is shown that the distance between any red intervals cannot be less than 1: +2 pre-points;
- correct example is given: +1 pre-point;
- the idea «if there are more than half of the red points on a segment of length 2, then there are red points a, b such that $a - b = 1$ » is given, but there is no proper proof: -1 pre-point;
- an error was made with the inclusion/non-inclusion of a point in an interval: -1 pre-point;
- an explicit estimate of the total length of the red intervals is not given: -1 pre-point.

Task 6. Правильный шестиугольник $ABCDEF$ (вершины названы последовательно в алфавитном порядке) расположен так, что расстояния от точек A, B, C до прямой l , расположенной в одной плоскости с ними, равны 4, 1, 3 соответственно. Найдите расстояние от точки D до прямой l . Обоснуйте свой ответ.

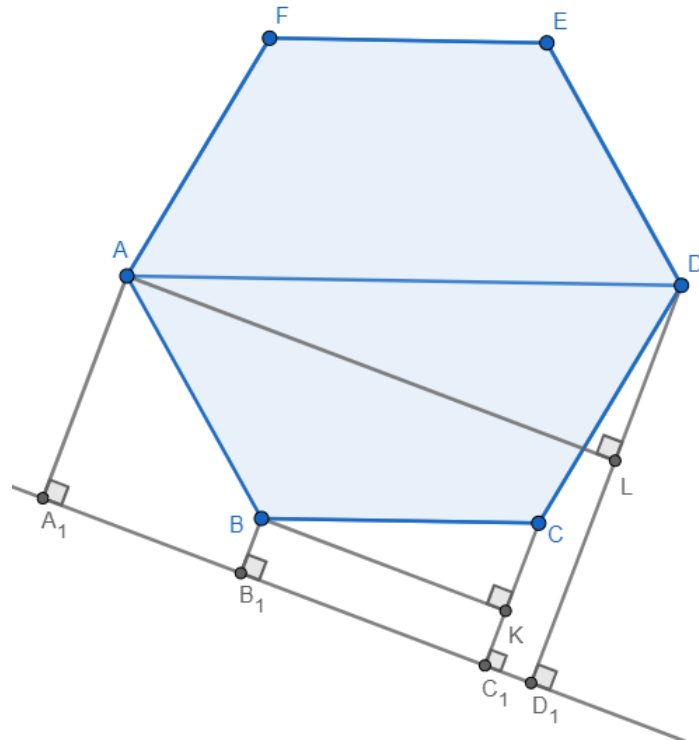
The regular hexagon $ABCDEF$ (the vertices are named sequentially in alphabetical order) is located in such way that the distances from the points A, B, C to the line l (which lies in the same plane as the points do) are 4, 1, 3 respectively. Find the distance from the point D to the line l . Explain your answer.

Answer: 0, 4, 8, 12

Решение (RUS). Существуют 4 принципиально разных взаимных расположения точек A, B, C, D и прямой l :



Рассмотрим первое из них (остальные рассматриваются аналогично) и введем обозначения, как показано на рисунке:

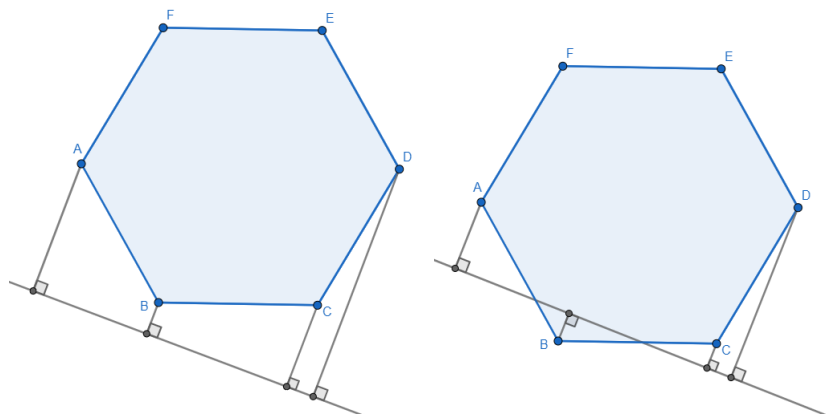


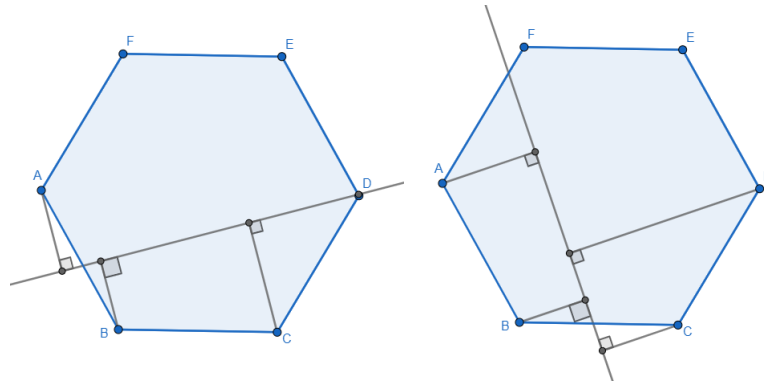
Отметим, что $AD \parallel BC$, $AD = 2 \cdot BC$, отсюда $\triangle BCK \sim \triangle ADL$ и $DL = 2 \cdot CK = 2(CC_1 - BB_1) = 4$, откуда $DD_1 = DL + LD_1 = DL + AA_1 = 8$.

Критерии оценивания:

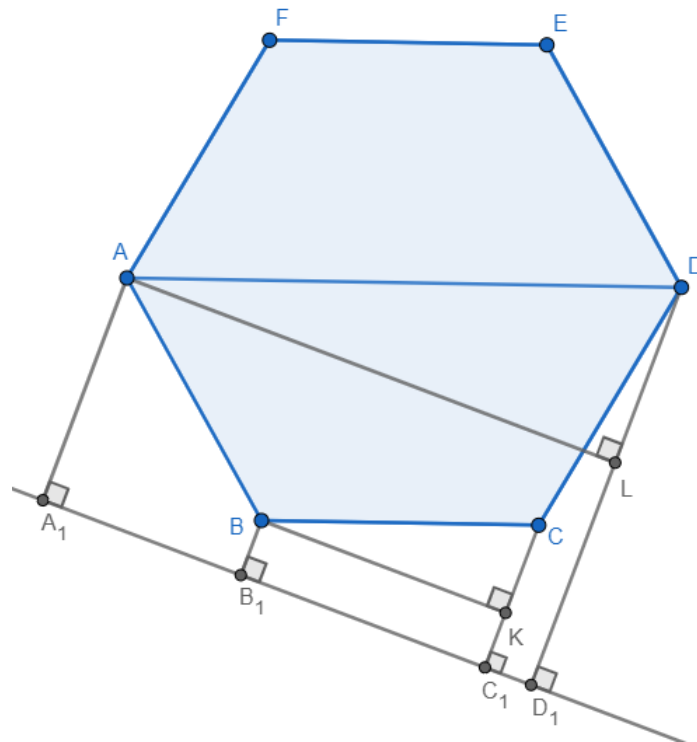
- в доказательстве есть значительные «пробелы», нет достаточного обоснования – 0 первичных баллов;
- доказательство почти верно, но рассмотрены не все случаи взаимного расположения шестиугольника и прямой l и допущена незначительная ошибка в рассуждениях или вычислениях – 2 первичных балла;
- доказательство верно, но рассмотрены не все случаи взаимного расположения шестиугольника и прямой l – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Solution (ENG). There are 4 fundamentally different mutual arrangements of points A, B, C, D and line l :





Lets consider the first of them (the rest are considered similarly) and introduce the notations as shown in the picture:



Note that $AD \parallel BC$, $AD = 2 \cdot BC$, thus $\triangle BCK \sim \triangle ADL$ and $DL = 2 \cdot CK = 2(CC_1 - BB_1) = 4$, and by that $DD_1 = DL + LD_1 = DL + AA_1 = 8$.

Criteria:

- the proof contains significant «gaps» and lacks explanation – 0 pre-points;
- the proof is almost correct, but not all cases of mutual arrangement of the hexagon and line l are considered and a minor error in reasoning or calculations is made – 2 pre-points;
- the proof is correct, but not all cases of mutual arrangement of the hexagon and line l are considered – 4 pre-points;
- a completely correct and explained solution – 5 pre-points.