

11 degree

Task 1.

1. Найдите центр симметрии кубической параболы $y = ax^3 + bx^2 - 81x + 3$, сумма и произведение корней которой равны соответственно 9 и -3 . В ответ запишите сумму координат найденного центра симметрии, при необходимости округлив ее до сотых.

Find the center of symmetry of the cubic parabola $y = ax^3 + bx^2 - 81x + 3$, the sum and product of whose roots are 9 and -3 , respectively. Write down the sum of the coordinates of the found center of symmetry as your answer, rounding it to hundredths if necessary.

Answer: -291

2. Найдите центр симметрии кубической параболы $y = ax^3 + bx^2 + 24x - 19$, сумма и произведение корней которой равны соответственно 9 и 19. В ответ запишите сумму координат найденного центра симметрии, при необходимости округлив ее до сотых.

Find the center of symmetry of the cubic parabola $y = ax^3 + bx^2 + 24x - 19$, the sum and product of whose roots are 9 and 19, respectively. Write down the sum of the coordinates of the found center of symmetry as your answer, rounding it to hundredths if necessary.

Answer: 2

3. Найдите центр симметрии кубической параболы $y = ax^3 + bx^2 + 45x - 51$, сумма и произведение корней которой равны соответственно 12 и 51. В ответ запишите сумму координат найденного центра симметрии, при необходимости округлив ее до сотых.

Find the center of symmetry of the cubic parabola $y = ax^3 + bx^2 + 45x - 51$, the sum and product of whose roots are 12 and 51, respectively. Write down the sum of the coordinates of the found center of symmetry as your answer, rounding it to hundredths if necessary.

Answer: 5

4. Найдите центр симметрии кубической параболы $y = ax^3 + bx^2 - 45x + 12$, сумма и произведение корней которой равны соответственно -3 и -12 . В ответ запишите сумму координат найденного центра симметрии, при необходимости округлив ее до сотых.

Find the center of symmetry of the cubic parabola $y = ax^3 + bx^2 - 45x + 12$, the sum and product of whose roots are -3 and -12 , respectively. Write down the sum of the coordinates of the found center of symmetry as your answer, rounding it to hundredths if necessary.

Answer: 58

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Используя теорему Виета для кубического четырехчлена вида $ax^3 + bx^2 + cx + d$, получим $-b/a = 9$, $-d/a = -3$, откуда $a = 1$, $b = -9$.

Обозначим $f(x) = x^3 - 9x^2 - 81x + 3$, тогда $f'(x) = 3x^2 - 18x - 81$, и $f'(x) = 0$ означает $x = 9$ или $x = -3$ – точки экстремума $f(x)$. Кубическая парабола симметрична относительно середины отрезка с концами в точках экстремума, поэтому абсцисса центра симметрии равна $x_c = \frac{9+(-3)}{2} = 3$, тогда ее ордината равна $y_c = f(x_c) = -294$, что дает $x_c + y_c = -291$.

Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

Using Vieta's theorem for a cubic quadrupole of the form $ax^3 + bx^2 + cx + d$, we obtain $-b/a = 9$, $-d/a = -3$, whence $a = 1$, $b = -9$.

Let $f(x) = x^3 - 9x^2 - 81x + 3$, then $f'(x) = 3x^2 - 18x - 81$, and $f'(x) = 0$ means $x = 9$ or $x = -3$ – the extremum points of $f(x)$. The cubic parabola is symmetric about the midpoint of the segment with the endpoints at the extremum points, therefore the abscissa of the center of symmetry is $x_c = \frac{9+(-3)}{2} = 3$, then its ordinate is $y_c = f(x_c) = -294$, which gives $x_c + y_c = -291$.

Task 2.

1. Дано уравнение $ax + 97y = c$. Найдите наименьшее целое положительное a , при котором существует целое $c \geq 2025$, для которого данное уравнение не имеет решений в целых неотрицательных x, y .

Given an equation $ax + 97y = c$. Find the smallest positive integer a such that there exists an integer $c \geq 2025$ for which the given equation has no solutions in non-negative integers x, y .

Answer: 22

2. Дано уравнение $ax + 83y = c$. Найдите наименьшее целое положительное a , при котором существует целое $c \geq 2025$, для которого данное уравнение не имеет решений в целых неотрицательных x, y .

Given an equation $ax + 83y = c$. Find the smallest positive integer a such that there exists an integer $c \geq 2025$ for which the given equation has no solutions in non-negative integers x, y .

Answer: 26

3. Дано уравнение $ax + 137y = c$. Найдите наименьшее целое положительное a , при котором существует целое $c \geq 2025$, для которого данное уравнение не имеет решений в целых неотрицательных x, y .

Given an equation $ax + 137y = c$. Find the smallest positive integer a such that there exists an integer $c \geq 2025$ for which the given equation has no solutions in non-negative integers x, y .

Answer: 16

4. Дано уравнение $ax + 79y = c$. Найдите наименьшее целое положительное a , при котором существует целое $c \geq 2025$, для которого данное уравнение не имеет решений в целых неотрицательных x, y .

Given an equation $ax + 79y = c$. Find the smallest positive integer a such that there exists an integer $c \geq 2025$ for which the given equation has no solutions in non-negative integers x, y .

Answer: 27

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Докажем теорему Сильвестра: уравнение $ax + by = c$ для положительных целых взаимно простых a, b имеет решение в целых неотрицательных x, y для любого целого $c > ab - a - b$, но не имеет при $c = ab - a - b$.

Действительно, уравнение $ax + by = ab - a - b$ имеет решение $(b - 1, -1)$, поэтому все его решения имеют вид $(b - 1 + kb, -1 - ka)$ для целых k , однако при $k \geq 0$ имеем $y = -1 - ka < 0$, а при $k < 0$ имеем $x = b - 1 + kb < 0$, т.е. решений в целых неотрицательных x, y уравнение не имеет. При $c > ab - a - b$ существует решение (x_0, y_0) , для которого целое $x_0 \in [0, b - 1]$, при этом $by_0 = c - ax_0 \geq c - a(b - 1) > -b$. Отсюда $y_0 > -1$, т.е. $y_0 \geq 0$ – найдено решение уравнения в неотрицательных целых числах. Доказательство завершено.

Итак, для исходного уравнения требуется $97a - a - 97 \geq 2025$, откуда целое $a \geq 22$.

$a = 22$ подходит: теорема Сильвестра к нему применима, поскольку 22 взаимно просто с 97.

Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

Lets prove the theorem: the equation $ax + by = c$ for positive integers with mutual co-prime a, b has a solution in non-negative integers x, y for any integer $c > ab - a - b$, but does not have one for $c = ab - a - b$.

Indeed, the equation $ax + by = ab - a - b$ has a solution $(b - 1, -1)$, therefore all its solutions have the form $(b - 1 + kb, -1 - ka)$ for integers k , however for $k \geq 0$ we have $y = -1 - ka < 0$, and for $k < 0$ we have $x = b - 1 + kb < 0$, i.e. the equation has no solutions in non-negative integers x, y . For $c > ab - a - b$ there is a solution (x_0, y_0) for which the integer $x_0 \in [0, b - 1]$, while $by_0 = c - ax_0 \geq c - a(b - 1) > -b$. Thus $y_0 > -1$, i.e. $y_0 \geq 0$ – the solution of the equation in non-negative integers has been found. The proof is complete.

By that, for the original equation $97a - a - 97 \geq 2025$ is required, thus the integer $a \geq 22$.

$a = 22$ suits us since it is co-prime with 97, and by that the theorem can be applied.

Task 3.

1. Царь вешает на сундук с государственной казной n замков и раздает ключи своим 10 советникам так, чтобы никакие 5 из них не могли открыть сундук, но любые 6 – могли (у царя есть множество ключей от каждого замка, и советник может получить ключи от нескольких замков). Найдите наименьшее n , при котором царь сможет добиться желаемого.

The king hangs n locks on the chest with the state treasury and distributes the keys to his 10 advisors so that no 5 of them can open the chest, but any 6 can (the king has many keys to each lock, and an advisor can receive keys to several locks). Find the smallest n at which the king can achieve the goal.

Answer: 252

2. Царь вешает на сундук с государственной казной n замков и раздает ключи своим 11 советникам так, чтобы никакие 5 из них не могли открыть сундук, но любые 6 – могли (у царя есть множество ключей от каждого замка, и советник может получить ключи от нескольких

замков). Найдите наименьшее n , при котором царь сможет добиться желаемого.

The king hangs n locks on the chest with the state treasury and distributes the keys to his 11 advisors so that no 5 of them can open the chest, but any 6 can (the king has many keys to each lock, and an advisor can receive keys to several locks). Find the smallest n at which the king can achieve the goal.

Answer: 462

3. Царь вешает на сундук с государственной казной n замков и раздает ключи своим 10 советникам так, чтобы никакие 4 из них не могли открыть сундук, но любые 5 – могли (у царя есть множество ключей от каждого замка, и советник может получить ключи от нескольких замков). Найдите наименьшее n , при котором царь сможет добиться желаемого.

The king hangs n locks on the chest with the state treasury and distributes the keys to his 10 advisors so that no 4 of them can open the chest, but any 5 can (the king has many keys to each lock, and an advisor can receive keys to several locks). Find the smallest n at which the king can achieve the goal.

Answer: 210

4. Царь вешает на сундук с государственной казной n замков и раздает ключи своим 11 советникам так, чтобы никакие 7 из них не могли открыть сундук, но любые 8 – могли (у царя есть множество ключей от каждого замка, и советник может получить ключи от нескольких замков). Найдите наименьшее n , при котором царь сможет добиться желаемого.

The king hangs n locks on the chest with the state treasury and distributes the keys to his 11 advisors so that no 7 of them can open the chest, but any 8 can (the king has many keys to each lock, and an advisor can receive keys to several locks). Find the smallest n at which the king can achieve the goal.

Answer: 330

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Поскольку никакие 5 советников не могут открыть всех замков, у них нет ключа от некоторого замка, но этот ключ есть у всех остальных советников. Значит, ключи от каждого замка должны быть ровно у $10 - 5 = 5$ советников, тогда количество замков не может быть меньше $C_{10}^5 = 252$. Остается только раздать по 5 ключей от каждого замка соответствующей пятерке советников, в результате чего царь добьется желаемого. Если раздать ключи от каждого замка не более чем 4 советникам, то не выполнится условие задачи, т.к. найдутся 6 советников, которые не смогут открыть определенный замок. Если же раздать ключи от каждого замка более чем 5 советникам, то не выполнится условие «никакие 5 не смогут открыть сундук».

Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

Since no 5 advisors can open all the locks, they do not have a key to some lock, but all the other advisers have such key. This means that exactly $10 - 5 = 5$ advisors must have keys to each lock, then the number of locks cannot be less than $C_{10}^5 = 252$. It remains to distribute 5 keys to each lock to the corresponding five advisors, and by that the king will achieve what he wants. If the king distributes the keys to each lock to no more than 4 advisors, then the task's requirements will not be fulfilled, because there will be 6 advisors who will not be able to open a certain lock. If the king distributes the keys to each lock to more

than 5 advisors, then the requirement «no 5 advisors will be able to open the chest» will not be fulfilled.

Task 4.

1. Решите уравнение

$$(4 \sin x + 3 \cos x)(2.5 \cos 2x + 8 \sin x + 20.5) = 131$$

и запишите в ответ сумму тангенсов тех корней этого уравнения, которые принадлежат отрезку $[0; 2\pi]$, представив ее в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых. Если эта сумма бесконечна, запишите в ответ число -1 .

Solve the equation

$$(4 \sin x + 3 \cos x)(2.5 \cos 2x + 8 \sin x + 20.5) = 131$$

and write down the sum of the tangents of those roots of the equation that belong to the segment $[0; 2\pi]$, representing it as an integer or a decimal fraction, rounded to hundredths if necessary. If the sum is infinite, write down the number -1 as your answer.

Answer: 1.33

2. Решите уравнение

$$(3 \sin x + 4 \cos x)(2.5 \cos 2x + 6 \sin x + 16.5) = 104$$

и запишите в ответ сумму тангенсов тех корней этого уравнения, которые принадлежат отрезку $[0; 2\pi]$, представив ее в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых. Если эта сумма бесконечна, запишите в ответ число -1 .

Solve the equation

$$(3 \sin x + 4 \cos x)(2.5 \cos 2x + 6 \sin x + 16.5) = 104$$

and write down the sum of the tangents of those roots of the equation that belong to the segment $[0; 2\pi]$, representing it as an integer or a decimal fraction, rounded to hundredths if necessary. If the sum is infinite, write down the number -1 as your answer.

Answer: 0.75

3. Решите уравнение

$$(4 \sin x + 3 \cos x)(2.5 \cos 2x + 8 \sin x + 23.5) = 146$$

и запишите в ответ сумму тангенсов тех корней этого уравнения, которые принадлежат отрезку $[0; 2\pi]$, представив ее в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых. Если эта сумма бесконечна, запишите в ответ число -1 .

Solve the equation

$$(4 \sin x + 3 \cos x)(2.5 \cos 2x + 8 \sin x + 23.5) = 146$$

and write down the sum of the tangents of those roots of the equation that belong to the segment $[0; 2\pi]$, representing it as an integer or a decimal fraction, rounded to hundredths if necessary. If the sum is infinite, write down the number -1 as your answer.

Answer: 1.33

4. Решите уравнение

$$(3 \sin x + 4 \cos x)(2.5 \cos 2x + 6 \sin x + 21.5) = 129$$

и запишите в ответ сумму тангенсов тех корней этого уравнения, которые принадлежат отрезку $[0; 2\pi]$, представив ее в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых. Если эта сумма бесконечна, запишите в ответ число -1 .

Solve the equation

$$(3 \sin x + 4 \cos x)(2.5 \cos 2x + 6 \sin x + 21.5) = 129$$

and write down the sum of the tangents of those roots of the equation that belong to the segment $[0; 2\pi]$, representing it as an integer or a decimal fraction, rounded to hundredths if necessary. If the sum is infinite, write down the number -1 as your answer.

Answer: 0.75

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Преобразуем уравнение к виду $5(\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x)(-5 \sin^2 x + 8 \sin x + 23) = 131$ и заметим, что $\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x = \cos(x - \arccos \frac{3}{5}) \leq 1$. Для последнего множителя левой части равенства обозначим $f(t) = -5t^2 + 8t + 23$ (здесь $t = \sin x \in [-1; 1]$), тогда $f(t)$ положительна и принимает наибольшее значение $f(\frac{-8}{2 \cdot (-5)}) = \frac{131}{5}$ для $\sin x = \frac{4}{5}$.

Итак, левая часть равенства не превосходит $5 \cdot 1 \cdot \frac{131}{5} = 131$ и принимает это значение только при $x = \arccos \frac{3}{5} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) (на отрезке $[0; 2\pi]$ есть только одна такая точка). Тогда $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3} \approx 1.33$.

Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

We transform the equation to the form $5(\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x)(-5 \sin^2 x + 8 \sin x + 23) = 131$ and note that $\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x = \cos(x - \arccos \frac{3}{5}) \leq 1$. For the last factor on the left side of the equality, we denote $f(t) = -5t^2 + 8t + 23$ (here $t = \sin x \in [-1; 1]$), then $f(t)$ is positive and takes the largest value $f(\frac{-8}{2 \cdot (-5)}) = \frac{131}{5}$ when $\sin x = \frac{4}{5}$.

So, the left side of the equality does not exceed $5 \cdot 1 \cdot \frac{131}{5} = 131$ and takes this value only for $x = \arccos \frac{3}{5} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) (there is only one such point on the segment $[0; 2\pi]$). Then $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3} \approx 1.33$.

Task 5. Числа $1, 2, 3, \dots, 2024$ записали в некотором порядке, получив последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2024}$. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_4| + \dots + |a_{2023} - a_{2024}|$$

Обоснуйте свой ответ.

The numbers $1, 2, 3, \dots, 2024$ being written in some order form a sequence $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2024}$. Find the greatest possible value of the expression

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_4| + \dots + |a_{2023} - a_{2024}|$$

Explain your answer.

Answer: 2048287

Решение (RUS). Отметим на числовой прямой точки $1, 2, 3, \dots, 2024$. Каждому расположению чисел в полученной последовательности можно поставить в соответствие замкнутую ломаную

с вершинами в указанных точках, и наоборот, каждой такой ломаной соответствует последовательность. Указанное в условии задачи выражение – это длина такой ломаной, т.е. сумма длин отрезков между соседними точками с учётом кратности покрытия звеньями.

Отрезок $[a, a + 1]$ может покрываться только звеньями, один конец каждого из которых лежит в множестве $\{1, \dots, a\}$, а другой – в множестве $\{a + 1, \dots, 2024\}$, причём каждой точке любого из этих множеств отвечает не более двух звеньев, а значит, покрывать отрезок $[a, a + 1]$ может не более $2 \cdot \min\{a, 2024 - a\}$ звеньев.

Итак, отрезок $[1, 2]$ покрыт не более чем двумя звеньями (как и отрезок $[2023, 2024]$), отрезок $[2, 3]$ – четырьмя (как и $[2022, 2023]$), и т.д. Поскольку ломаная не замкнута, хотя бы один из отрезков $[a, a + 1]$ будет покрыт нечетным числом звеньев. Тогда длина ломаной не превосходит

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 1011 + 1012 + 1011 + \dots + 3 + 2 + 1) - 1 = 2048287$$

Приведем пример ломаной, на которой достигается описанный максимум:

$$1012, 2024, 1, 2023, 2, 2022, 3, \dots, 1013$$

Критерии оценивания:

- дан верный ответ и указано, что нужный пример достигается, когда разности между соседними членами последовательности близки к максимально возможным, но сам пример явно не приведен – 1 первичный балл;
- дан верный ответ и приведен верный пример, но доказательство неверно – 2 первичных балла;
- дана верная оценка длины ломаной, но нет верного примера – 3 первичных балла;
- приведено корректное доказательство оценки, но допущена вычислительная ошибка – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение и верный ответ – 5 первичных баллов.

Solution (ENG). Lets mark the points $1, 2, 3, \dots, 2024$ on an axis. Each arrangement of numbers in the resulting sequence can be assigned a polygonal chain with vertices at the points mentioned, and vice versa, i.e. each such polygonal chain corresponds to some sequence. The expression specified in the task's formulation is the length of such chain, i.e. the sum of lengths of the segments between the points, taking into account the multiplicity of the link coverage.

The segment $[a, a + 1]$ can be covered only by those links with one end lying in the set $\{1, \dots, a\}$ and the other end in the set $\{a + 1, \dots, 2024\}$, and each point of any of these sets corresponds to no more than two links, which means that the segment $[a, a + 1]$ can be covered by no more than $2 \cdot \min\{a, 2024 - a\}$ links.

Thus, the segment $[1, 2]$ is covered by no more than two links (as is the segment $[2023, 2024]$), the segment $[2, 3]$ is covered by no more than four links (as is $[2022, 2023]$), etc. Since the chain is not closed, at least one of the segments $[a, a + 1]$ will be covered by an odd number of links. Then the length of the broken line does not exceed

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 1011 + 1012 + 1011 + \dots + 3 + 2 + 1) - 1 = 2048287$$

Lets give an example of a polygonal chain which the described maximum is reached on:

$$1012, 2024, 1, 2023, 2, 2022, 3, \dots, 1013$$

Criteria:

- the correct answer is given and it is mentioned that the required example is achieved when the differences between adjacent members of the sequence are close to the maximum possible, but the example itself is not explicitly given – 1 pre-point;
- the correct answer and correct example are given, but the proof is incorrect – 2 pre-points;
- the correct estimate of the length of the polyline is given, but there is no correct example – 3 pre-points;
- a correct proof of the estimate is given, but a computational error was made – 4 pre-points;
- a completely correct and explained solution and the correct answer are given – 5 pre-points.

Task 6. Дан куб с ребром 1, центр которого совпадает с вершиной O правильной треугольной пирамиды, боковые ребра которой равны 2, и все плоские углы при вершине O – прямые. Может ли быть так, что все вершины куба лежат вне пирамиды? Обоснуйте свой ответ.

Given a cube with edge 1, the center of which coincides with the vertex O of a regular triangular pyramid, the lateral edges of which are equal to 2, and all the plane angles at the vertex O are equal to 90° . Is it possible for all the vertices of the cube to lie outside the pyramid? Explain your answer.

Answer: Да, такое возможно / Yes, it is possible

Решение (RUS). Отметим, что основание пирамиды расположено вне куба, поскольку полудиagonal куба равна $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, что меньше высоты пирамиды, имеющей длину $\sqrt{2^2 - \frac{2}{3}} > 1$. Заметим, что можно одновременно разместить 8 непересекающихся пирамид, удовлетворяющих условиям задачи, просто «продлив» плоскости боковых граней одной пирамиды за ее боковые ребра, а затем достроив основания оставшихся 7 пирамид. Значит, если мы сможем повернуть описанную конструкцию вокруг точки O так, чтобы внутри одной из пирамид оказались две вершины куба, то среди остальных 7 пирамид найдется та, которая не содержит ни одной из остальных 6 вершин куба.

Опишем, как построить пирамиду, внутри которой окажутся две вершины куба: для этого повернем ее вокруг точки O так, чтобы две фиксированные смежные вершины A, B куба оказались в боковой грани пирамиды – это возможно, поскольку $\angle AOB < 90^\circ$. Осталось немного «пошевелить» пирамиду так, чтобы обе точки A, B оказались внутри нее.

Критерии оценивания:

- приведены графические примеры без аналитических обоснований их корректности – 0 первичных баллов;
- доказано, что основание пирамиды лежит вне куба – 2 первичных балла;
- присутствует плодотворная идея с принципом Дирихле, но со значительным недочетом – 2 первичных балла;
- показано, что если основание пирамиды параллельно грани куба, то вершины этой грани и точки основания пирамиды лежат на одной окружности при проецировании точек – 2 первичных балла;
- присутствует плодотворная идея с принципом Дирихле, но не доказано, что основание пирамиды лежит вне куба, либо другие недочеты – 3 первичных балла;
- решение почти верное, но есть небольшие недочеты, такие как отсутствие примера погружения двух вершин куба внутрь пирамиды – 4 первичных балла;

- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Solution (ENG). Note that the base of the pyramid is located outside the cube, since the half-diagonal of the cube is $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, which is less than the height of the pyramid, which has a length of $\sqrt{2^2 - \frac{2}{3}} > 1$. Note that it is possible to simultaneously place 8 non-intersecting pyramids that satisfy the conditions of the task by simply «extending» the planes of the lateral faces of one pyramid beyond its lateral edges, and then completing the bases of the remaining 7 pyramids. Therefore, if we can rotate the described construction around point O in such way that two vertices of the cube are inside one of the pyramids, then among the remaining 7 pyramids there will be one that does not contain any of the remaining 6 vertices of the cube.

Lets describe how to construct a pyramid that will contain two vertices of the cube: to do that, we rotate it around point O so that two fixed adjacent vertices A, B of the cube will be in the lateral face of the pyramid – this is possible because $\angle AOB < 90^\circ$. All that remains is to «wiggle» the pyramid a little so that both the points A, B will be inside of it.

Criteria:

- graphical examples are given without proper proof – 0 pre-points;
- it is proven that the base of the pyramid lies outside the cube – 2 pre-points;
- there is a fruitful idea with Dirichlet's principle, but with a significant mistake – 2 pre-points;
- it is shown that if the base of the pyramid is parallel to a face of the cube, then the vertices of the face and the points of the base of the pyramid lie on the same circle when projecting the points – 2 pre-points;
- there is a fruitful idea with Dirichlet's principle, but it is not proven that the base of the pyramid lies outside the cube, or other mistakes – 3 pre-points;
- the solution is almost correct, but there are minor mistake(s) like there is no example of how to place two vertices of the cube inside the pyramid – 4 pre-points;
- a completely correct and explained solution – 5 pre-points.