

7-8th degree

Task 1.

1. Спасшийся после кораблекрушения купец, попав в ближайший порт, ждет денежной помощи от друзей. У него осталась лишь одна драгоценность – золотая цепь на шее, и хозяин гостиницы за стол и кров берет по одному звену цепочки в день (в n -й день у хозяина должно быть ровно n звеньев, кусочки цепи можно получать обратно в виде сдачи). Цепь – произведение ювелирного искусства, поэтому купец хочет распилить как можно меньше звеньев, но он не знает, когда получит помощь от друзей.

Какое наименьшее число звеньев цепи придется распилить, если длина цепи – 100 звеньев, и купцу придется ждать не более 30 дней?

A merchant who has survived a shipwreck and arrived at the nearest port is waiting for financial help from his friends. He has only one piece of jewelry left – a gold chain around his neck, and the innkeeper takes one link of the chain a day for living (on the n th day the innkeeper must have exactly n links, and links of the chain can be returned as change). The chain is a work of jewelry art, so the merchant wants to saw off as few links as possible, but he does not know when he will receive help from his friends.

What is the smallest number of links of the chain that will have to be sawed off if the total length of the chain is 100 links, and the merchant will have to wait for no more than 30 days?

Answer: 5

2. Спасшийся после кораблекрушения купец, попав в ближайший порт, ждет денежной помощи от друзей. У него осталась лишь одна драгоценность – золотая цепь на шее, и хозяин гостиницы за стол и кров берет по одному звену цепочки в день (в n -й день у хозяина должно быть ровно n звеньев, кусочки цепи можно получать обратно в виде сдачи). Цепь – произведение ювелирного искусства, поэтому купец хочет распилить как можно меньше звеньев, но он не знает, когда получит помощь от друзей.

Какое наименьшее число звеньев цепи придется распилить, если длина цепи – 100 звеньев, и купцу придется ждать не более 20 дней?

A merchant who has survived a shipwreck and arrived at the nearest port is waiting for financial help from his friends. He has only one piece of jewelry left – a gold chain around his neck, and the innkeeper takes one link of the chain a day for living (on the n th day the innkeeper must have exactly n links, and links of the chain can be returned as change). The chain is a work of jewelry art, so the merchant wants to saw off as few links as possible, but he does not know when he will receive help from his friends.

What is the smallest number of links of the chain that will have to be sawed off if the total length of the chain is 100 links, and the merchant will have to wait for no more than 20 days?

Answer: 4

3. Спасшийся после кораблекрушения купец, попав в ближайший порт, ждет денежной помощи от друзей. У него осталась лишь одна драгоценность – золотая цепь на шее, и хозяин гостиницы за стол и кров берет по одному звену цепочки в день (в n -й день у хозяина должно

быть ровно n звеньев, кусочки цепи можно получать обратно в виде сдачи). Цепь – произведение ювелирного искусства, поэтому купец хочет распилить как можно меньше звеньев, но он не знает, когда получит помощь от друзей.

Какое наименьшее число звеньев цепи придется распилить, если длина цепи – 100 звеньев, и купцу придется ждать не более 40 дней?

A merchant who has survived a shipwreck and arrived at the nearest port is waiting for financial help from his friends. He has only one piece of jewelry left – a gold chain around his neck, and the innkeeper takes one link of the chain a day for living (on the n th day the innkeeper must have exactly n links, and links of the chain can be returned as change). The chain is a work of jewelry art, so the merchant wants to saw off as few links as possible, but he does not know when he will receive help from his friends.

What is the smallest number of links of the chain that will have to be sawed off if the total length of the chain is 100 links, and the merchant will have to wait for no more than 40 days?

Answer: 5

4. Спасшийся после кораблекрушения купец, попав в ближайший порт, ждет денежной помощи от друзей. У него осталась лишь одна драгоценность – золотая цепь на шее, и хозяин гостиницы за стол и кров берет по одному звену цепочки в день (в n -й день у хозяина должно быть ровно n звеньев, кусочки цепи можно получать обратно в виде сдачи). Цепь – произведение ювелирного искусства, поэтому купец хочет распилить как можно меньше звеньев, но он не знает, когда получит помощь от друзей.

Какое наименьшее число звеньев цепи придется распилить, если длина цепи – 100 звеньев, и купцу придется ждать не более 25 дней?

A merchant who has survived a shipwreck and arrived at the nearest port is waiting for financial help from his friends. He has only one piece of jewelry left – a gold chain around his neck, and the innkeeper takes one link of the chain a day for living (on the n th day the innkeeper must have exactly n links, and links of the chain can be returned as change). The chain is a work of jewelry art, so the merchant wants to saw off as few links as possible, but he does not know when he will receive help from his friends.

What is the smallest number of links of the chain that will have to be sawed off if the total length of the chain is 100 links, and the merchant will have to wait for no more than 25 days?

Answer: 4

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

После первого распила у нас 1 (распиленное) звено и оставшаяся (разомкнутая) цепочка. Если в первый день купец не получил денег, ему нужно распилить ещё одно звено. Но где? Если распилить крайнее звено, оплатить можно лишь второй день. Можно оставить с краю два звена, а третье распилить. Тогда будем иметь три кусочка длиной 1, 2 и 97, и второй день можно оплатить двумя способами: 1+1 или 2 (получив 1 сдачей), а всего кусочков хватит для оплаты 4 дней. Но выгоднее распилить четвертое от края звено: 1, 3, 1 – в этом случае двух распилов хватит для оплаты 5 дней. Далее, рассуждая так же, делаем третий распил, оставляя от края кусочек в 7 звеньев: 5 дней подряд уже оплачено, 6-й оплатим всеми предыдущими + третьим распиленным звеном, и так далее.

В случае цепи длиной 100 звеньев и необходимости прожить в гостинице до 30 дней имеем следующие 4 последовательных распила и получившиеся кусочки (где «;» – разделитель распилов): 1; 3,1; 7,1; 15,1 после чего останется кусок длиной в 71 звено. Получившихся после 4-го распила кусков хватит лишь на 29 дней, и поэтому придется сделать еще один, 5-й распил (любой).

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)*

After the first cut, we have 1 (sawn) link and the remaining (open) chain. If the merchant did not receive money on the first day, he needs to saw another link. But where? If you saw the outermost link, you can only pay for the second day. You can leave two links at the edge and saw the third. Then we will have three pieces 1, 2 and 97 long, and the second day can be paid in two ways: $1 + 1$ or 2 (receiving 1 in change), and in total there will be enough pieces to pay for 4 days. But it is more profitable to saw the fourth link from the edge: 1, 3, 1 – in this case, two cuts will be enough to pay for 5 days. Then, reasoning in the same way, we make a third cut, leaving a piece of 7 links from the edge: 5 days in a row have already been paid, the 6th will be paid with all the previous ones + the third sawn link, and so on.

In the case of a chain 100 links long and the need to stay in a hotel for up to 30 days, we have the following 4 consecutive cuts and the resulting pieces (where «;» is the cut separator): 1; 3,1; 7,1; 15,1 after which a piece 71 links long will remain. The pieces obtained after the 4th cut will be enough for only 29 days, and therefore one more, 5th cut (any) will have to be made.

Task 2.

1. Рассмотрим рекурсивную функцию:

$$F(n) = \begin{cases} n - 5, & \text{если } n > 2024 \\ F(F(n + 6)), & \text{если } n \leq 2024 \end{cases}$$

Сколько корней в натуральных (положительных целых) числах имеет уравнение $F(n) = 2020$? Если оно не имеет корней, либо корней бесконечно много, то введите 0 в поле для ответа.

Consider the recursive function:

$$F(n) = \begin{cases} n - 5, & \text{if } n > 2024 \\ F(F(n + 6)), & \text{if } n \leq 2024 \end{cases}$$

How many roots (in positive integers) does the equation $F(n) = 2020$ have? If it has no roots, or there are infinitely many roots, then enter 0 as your answer.

Answer: 2025

2. Рассмотрим рекурсивную функцию:

$$F(n) = \begin{cases} n - 5, & \text{если } n > 2025 \\ F(F(n + 6)), & \text{если } n \leq 2025 \end{cases}$$

Сколько корней в натуральных (положительных целых) числах имеет уравнение $F(n) = 2020$? Если оно не имеет корней, либо корней бесконечно много, то введите 0 в поле для ответа.

Consider the recursive function:

$$F(n) = \begin{cases} n - 5, & \text{if } n > 2025 \\ F(F(n + 6)), & \text{if } n \leq 2025 \end{cases}$$

How many roots (in positive integers) does the equation $F(n) = 2020$ have? If it has no roots, or there are infinitely many roots, then enter 0 as your answer.

Answer: 2026

3. Рассмотрим рекурсивную функцию:

$$F(n) = \begin{cases} n - 5, & \text{если } n > 2024 \\ F(F(n + 6)), & \text{если } n \leq 2024 \end{cases}$$

Найдите сумму всех положительных целых корней уравнения $F(n) = 2025$. Если оно не имеет корней, либо корней бесконечно много, то введите 0 в поле для ответа.

Consider the recursive function:

$$F(n) = \begin{cases} n - 5, & \text{if } n > 2024 \\ F(F(n + 6)), & \text{if } n \leq 2024 \end{cases}$$

Find the sum of all positive integer roots of the equation $F(n) = 2025$. If it has no roots, or there are infinitely many roots, then enter 0 as your answer.

Answer: 2030

4. Рассмотрим рекурсивную функцию:

$$F(n) = \begin{cases} n - 5, & \text{если } n > 2024 \\ F(F(n + 6)), & \text{если } n \leq 2024 \end{cases}$$

Найдите сумму всех положительных целых корней уравнения $F(n) = 2024$. Если оно не имеет корней, либо корней бесконечно много, то введите 0 в поле для ответа.

Consider the recursive function:

$$F(n) = \begin{cases} n - 5, & \text{if } n > 2024 \\ F(F(n + 6)), & \text{if } n \leq 2024 \end{cases}$$

Find the sum of all positive integer roots of the equation $F(n) = 2024$. If it has no roots, or there are infinitely many roots, then enter 0 as your answer.

Answer: 2029

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Для любого $n \geq 2025$ очевидно без всякой рекурсии, что $F(n) = n - 5$. Вычислим $F(n)$ для нескольких $n \leq 2024$:

$$F(2024) = F(F(2030)) = F(2025) = 2020$$

$$F(2023) = F(F(2029)) = F(2024) = 2020$$

$$F(2022) = F(F(2038)) = F(2023) = 2020$$

$$F(2021) = F(F(2027)) = F(2022) = 2020$$

$$F(2020) = F(F(2026)) = F(2021) = 2020$$

Докажем индукцией по k следующее утверждение: $F(2024 - k) = F(2023 - k) = F(2022 - k) = F(2021 - k) = F(2020 - k) = 2020$ любого $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2019\}$. База индукции уже доказана в примерах выше.

Пусть для некоторого $k > 0$ выполнено $F(2024 - k) = F(2023 - k) = F(2022 - k) = F(2021 - k) = F(2020 - k) = 2020$. Тогда имеем:

$$F(2024 - (k + 1)) = F(2023 - k) = 2020 \text{ по предположению индукции;}$$

$$F(2023 - (k + 1)) = F(2022 - k) = 2020 \text{ по предположению индукции;}$$

$$F(2022 - (k + 1)) = F(2021 - k) = 2020 \text{ по предположению индукции;}$$

$$F(2021 - (k + 1)) = F(2020 - k) = 2020 \text{ по предположению индукции;}$$

$$F(2020 - (k + 1)) = F(2019 - k) = F(F(2019 - k + 6) = F(F(2025 - k))) = F(F(2024 - (k - 1))) = F(2020) = 2020.$$

Таким образом, утверждение доказано.

Итак, $F(n) = 2020$ для всех натуральных $n \leq 2025$ – таких ровно 2025.

Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

For any $n \geq 2025$ it is obvious without any recursion that $F(n) = n - 5$. Lets calculate $F(n)$ for several $n \leq 2024$:

$$F(2024) = F(F(2030)) = F(2025) = 2020$$

$$F(2023) = F(F(2029)) = F(2024) = 2020$$

$$F(2022) = F(F(2038)) = F(2023) = 2020$$

$$F(2021) = F(F(2027)) = F(2022) = 2020$$

$$F(2020) = F(F(2026)) = F(2021) = 2020$$

Lets prove the following statement by induction on k : $F(2024 - k) = F(2023 - k) = F(2022 - k) = F(2021 - k) = F(2020 - k) = 2020$ for any $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2019\}$. The induction base has already been proved in the examples above.

Let $F(2024 - k) = F(2023 - k) = F(2022 - k) = F(2021 - k) = F(2020 - k) = 2020$ be satisfied for some $k > 0$. Then we have:

$$F(2024 - (k + 1)) = F(2023 - k) = 2020 \text{ by induction hypothesis;}$$

$$F(2023 - (k + 1)) = F(2022 - k) = 2020 \text{ by induction hypothesis;}$$

$$F(2022 - (k + 1)) = F(2021 - k) = 2020 \text{ by induction hypothesis;}$$

$$F(2021 - (k + 1)) = F(2020 - k) = 2020 \text{ by induction hypothesis;}$$

$$F(2020 - (k + 1)) = F(2019 - k) = F(F(2019 - k + 6) = F(F(2025 - k))) = F(F(2024 - (k - 1))) = F(2020) = 2020.$$

By that, the statement is proven.

So, $F(n) = 2020$ for all positive integers $n \leq 2025$ – there are exactly 2025 of them.

Task 3.

1. Известно, что есть ровно 2^{2024} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее нечётное число элементов. Чему равно количество элементов множества A ?

There are exactly 2^{2024} ways to select from a finite set A a subset containing an odd number of elements. What is the number of elements in the set A ?

Answer: 2025

2. Известно, что есть ровно 2^{2024} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее чётное (возможное, нулевое) число элементов. Чему равно количество элементов множества A ?

There are exactly 2^{2024} ways to select from a finite set A a subset containing an even (possibly, zero) number of elements. What is the number of elements in the set A ?

Answer: 2025

3. Известно, что есть ровно 2^{101} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее нечётное число элементов. Чему равно количество элементов множества A ?

There are exactly 2^{101} ways to select from a finite set A a subset containing an odd number of elements. What is the number of elements in the set A ?

Answer: 102

4. Известно, что есть ровно 2^{101} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее чётное (возможное, нулевое) число элементов. Чему равно количество элементов множества A ?

There are exactly 2^{101} ways to select from a finite set A a subset containing an even (possibly, zero) number of elements. What is the number of elements in the set A ?

Answer: 102

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)*

Зафиксируем некоторый элемент x множества A . Теперь разобьём все его подмножества на пары, отличающиеся только наличием (либо отсутствием) элемента x . Очевидно, в каждой паре одно подмножество содержит чётное (возможно, нулевое) число элементов, а другое – нечётное число элементов. Таким образом, «чётных» подмножеств столько же, сколько и «нечётных» – значит, если множество A содержит n элементов и, как следствие, 2^n подмножеств (включая пустое), то количество «нечётных» подмножеств равно $2^n : 2 = 2^{n-1}$. По условию это количество равно 2^{2024} , откуда $n = 2025$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)*

Lets fix some element x of the set A . Now we divide all its subsets into pairs that differ only in the presence (or absence) of element x . Obviously, in each pair one subset contains an even (possibly zero) number of elements, and the other – an odd number of elements. Thus, there are as many «even» subsets as «odd» ones – by that, if set A contains n elements and (as a consequence) 2^n subsets (including the empty one), then the number of «odd» subsets is $2^n : 2 = 2^{n-1}$. By the task's condition, the number is 2^{2024} , thus $n = 2025$.

Task 4.

1. Софья отметила на координатной прямой все точки $a, a + 3, a + 6, a + 9, \dots$, начиная с некоторого $a < 0$; Света отметила на той же прямой точки $b, b - 5, b - 10, b - 15, \dots$, начиная с некоторого $b > 100$. Найдите наименьшее возможное количество отмеченных точек на отрезке $[0; 100]$.

Sofia marked on the coordinate line all points $a, a + 3, a + 6, a + 9, \dots$, starting from some $a < 0$; Sveta marked on the same line points $b, b - 5, b - 10, b - 15, \dots$, starting from some $b > 100$. Find the smallest possible number of marked points on the segment $[0; 100]$.

Answer: 46

2. Софья отметила на координатной прямой все точки $a, a + 3, a + 6, a + 9, \dots$, начиная с некоторого $a < 0$; Света отметила на той же прямой точки $b, b - 5, b - 10, b - 15, \dots$, начиная с некоторого $b > 200$. Найдите наименьшее возможное количество отмеченных точек на отрезке $[0; 200]$.

Sofia marked on the coordinate line all points $a, a + 3, a + 6, a + 9, \dots$, starting from some $a < 0$; Sveta marked on the same line points $b, b - 5, b - 10, b - 15, \dots$, starting from some $b > 200$. Find the smallest possible number of marked points on the segment $[0; 200]$.

Answer: 92

3. Софья отметила на координатной прямой все точки $a, a + 3, a + 6, a + 9, \dots$, начиная с некоторого $a < 0$; Света отметила на той же прямой точки $b, b - 5, b - 10, b - 15, \dots$, начиная с некоторого $b > 50$. Найдите наименьшее возможное количество отмеченных точек на отрезке $[0; 50]$.

Sofia marked on the coordinate line all points $a, a + 3, a + 6, a + 9, \dots$, starting from some $a < 0$; Sveta marked on the same line points $b, b - 5, b - 10, b - 15, \dots$, starting from some $b > 50$. Find the smallest possible number of marked points on the segment $[0; 50]$.

Answer: 22

4. Софья отметила на координатной прямой все точки $a, a + 3, a + 6, a + 9, \dots$, начиная с некоторого $a < 0$; Света отметила на той же прямой точки $b, b - 5, b - 10, b - 15, \dots$, начиная с некоторого $b > 150$. Найдите наименьшее возможное количество отмеченных точек на отрезке $[0; 150]$.

Sofia marked on the coordinate line all points $a, a + 3, a + 6, a + 9, \dots$, starting from some $a < 0$; Sveta marked on the same line points $b, b - 5, b - 10, b - 15, \dots$, starting from some $b > 150$. Find the smallest possible number of marked points on the segment $[0; 150]$.

Answer: 70

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Чтобы было как можно меньше отмеченных точек, как можно большее их число должно совпасть.

Ясно, что каждая пятая точка Софьи может совпасть с каждой третьей точкой Светы – это значит, что на каждом полуинтервале $[x; x + 15)$ может быть не менее 7 отмечанных точек:

$$x = y, x + 3, y + 5, x + 6, x + 9, y + 10, x + 12,$$

где точки $x + 3k$ отмечала Софья, $y + 5t$ отмечала Света ($k, t \in \{0, 1, 2, \dots\}$).

Исходный отрезок имеет длину 100, поэтому в нем уместится 6 упомянутых полуинтервалов, т.е. отмеченных точек на отрезке $[0; 100]$ будет не менее $7 \cdot 6 = 42$:

$$x, x + 3, x + 5, \dots, x + 5 \cdot 15 + 12$$

Остаются полуинтервал $[0; x)$ и отрезок $[x + 90; 100]$ с суммарной длиной 10. Легко проверить, что в них не менее 4 отмеченных точек (например, для $x = 2$) – таким образом, общее количество отмеченных точек не может быть меньше $42 + 4 = 46$.

Solution (ENG). (*given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly*)

In order to have as few marked points as possible, as many of them as possible must coincide. It is clear that every fifth point marked by Sofia can coincide with every third point marked by Sveta – by that, on each half-interval $[x; x + 15)$ there will be at least 7 marked points:

$$x = y, x + 3, y + 5, x + 6, x + 9, y + 10, x + 12,$$

where points $x + 3k$ were marked by Sofia, and $y + 5t$ were marked by Sveta ($k, t \in \{0, 1, 2, \dots\}$).

The original segment has a length of 100, so it can accommodate 6 of the mentioned half-intervals, i.e. there will be at least $7 \cdot 6 = 42$ marked points on the segment $[0; 100]$:

$$x, x + 3, x + 5, \dots, x + 5 \cdot 15 + 12$$

There remains the half-interval $[0; x)$ and the segment $[x + 90; 100]$ with a total length of 10. It is easy to check that they contain at least 4 marked points (for example, for $x = 2$) – thus, the total number of marked points cannot be less than $42 + 4 = 46$.

Task 5. Стёпа купил 11 пирожных и решил поделиться ими с Петей – для этого Стёпа может разрезать одно из пирожных на две части. Всегда ли Стёпа может добиться того, чтобы ему и Пете достались по 6 пирожных (целых или нет) равной совокупной массы, если изначально все 11 пирожных имели разные массы? Обоснуйте свой ответ.

Stephen bought 11 cakes and decided to share them with Peter – to do so, he can cut one of the cakes into two parts. Can Stephen ensure that both he and Peter will get 6 cakes (uncut or not) of equal total mass, if initially all 11 cakes had different masses? Explain your answer.

Решение (RUS). Да, может. Упорядочим пирожные по возрастанию их масс: $a_1 < a_2 < \dots < a_{11}$. Ясно, что

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 < a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} < a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} < a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}$$

Значит, самое большое (11-е) пирожное всегда можно разрезать на такие две части x, y ($x + y = a_{11}$), что $x + a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = y + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$.

Критерии оценивания:

- указано, что надо разрезать самое большое пирожное – 1 первичный балл;
- помимо разрезания 11-го пирожного, указано, как распределить первые 10 пирожных – 2 первичных балла;

- кроме вышеописанного, показано, что разница масс между четными и нечетными пирожными меньше массы 11-го пирожного – 3 первичных балла;
- верное решение, но с мелкими недочетами – 4 первичных балла;
- полностью верное решение – 5 первичных баллов.

Solution (ENG). Yes, he can. Lets arrange the cakes in ascending order of their masses: $a_1 < a_2 < \dots < a_{11}$. It is clear that

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 < a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} < a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} < a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}$$

By that, the largest (11th) cake can always be cut into two parts x, y ($x + y = a_{11}$) such that $x + a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = y + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$.

Criteria:

- it is shown that the largest cake should be cut – 1 pre-point;
- in addition to cutting the 11th cake, it is shown how to distribute the first 10 cakes – 2 pre-points;
- in addition, it is shown that the difference in mass between the even and odd cakes is less than the mass of the 11th cake – 3 pre-points;
- correct solution, but with minor flaws – 4 pre-points;
- completely correct solution – 5 pre-points.

Task 6. Мишень имеет форму правильного 30-угольника (все его стороны и все его углы – равны), вершины которого пронумерованы по часовой стрелке: $1, 2, 3, \dots, 30$ – Змей Горыныч мысленно построил треугольник, вершинами которого являются три из этих точек, и сказал Ивану Царевичу: «Если пошлешь свою стрелу внутрь загаданного мной треугольника (но не на сторону треугольника!), то отпущу тебя с миром, а если нет – съем».

Змей Горыныч не знал, что Иван Царевич – очень меткий стрелок из лука: всегда попадает в ту точку мишени, в которую целится. Какое наименьшее количество выстрелов ему потребуется, чтобы гарантировать себе свободу?

The target is in the shape of a regular 30-gon (all its sides and all its angles are equal), the vertices of which are numbered clockwise: $1, 2, 3, \dots, 30$ – The Dragon mentally constructed a triangle whose vertices are three of these points, and said to Ivan: «If you send your arrow inside the triangle I have in mind (but not on its side!), I will let you go in peace, and if not, I will eat you.»

The Dragon did not know that Ivan is a very accurate archer: he always hits the point of the target which he aims at. What is the least number of shots that he needs to guarantee his freedom?

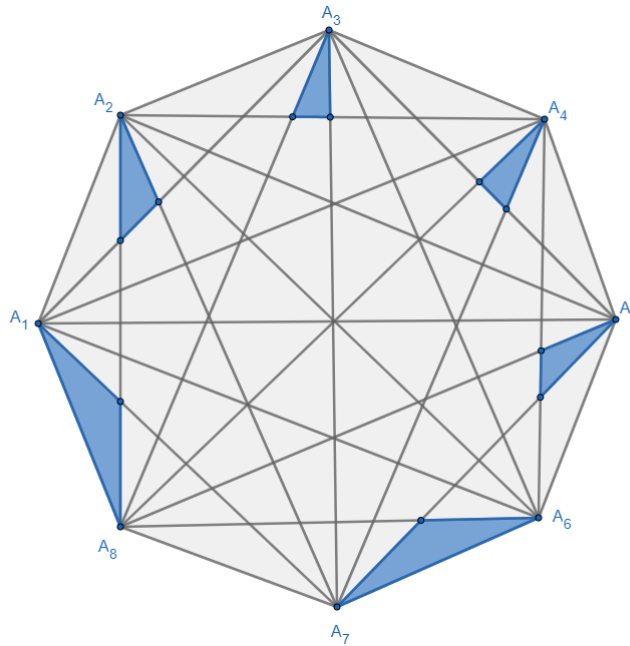
Answer: 28

Критерии оценивания:

- оценка приведена без объяснений – 1 первичный балл;
- приведена оценка с неполным доказательством – 3 первичных балла;
- оценка обоснована, но пример не приведен либо некорректен – 4 первичных балла;
- приведена и обоснована оценка, приведен корректный пример – 5 первичных баллов.

Решение (RUS). Диагонали, выходящие из вершины выпуклого (в частности, правильного) n -угольника, делят его на $n - 2$ треугольника, поэтому $n - 3$ выстрелов Ивану может не хватить. Покажем, что $n - 2$ выстрелов будет достаточно (в нашем случае $n = 30$): на рисунке показано соответствующее расположение треугольников (в каждый из которых Ивану достаточно выстрелить по одному разу) для 8-угольника. Внутри каждого треугольника с вершинами в вершинах исходного правильного многоугольника всегда содержится треугольник, окрашенный в синий цвет.

Итак, Ивану будет достаточно сделать 28 выстрелов, но меньшим числом обойтись нельзя: тогда спасение не будет гарантировано.



Solution (ENG). The diagonals going out of the vertex of a convex (in particular, regular) n -gon divide it into $n - 2$ triangles, so $n - 3$ shots may not be enough for Ivan. Lets show that $n - 2$ shots will be enough (in our case $n = 30$): the picture shows the corresponding arrangement of triangles (Ivan only needs to shoot once at each) for an 8-gon. Inside each triangle with vertices at the vertices of the original regular polygon there is always a triangle painted blue.

So, it will be enough for Ivan to make 28 shots, but he cannot get by with a smaller number: then salvation will not be guaranteed.

Criteria:

- the estimation is given without explanation – 1 pre-point;
- the estimation is given with incomplete proof – 3 pre-points;
- the estimation is proven, but the example is not given or is incorrect – 4 pre-points;
- the estimation is proven, a correct example is given – 5 pre-points.