

7-8th degree

Task 1.

1. В выпуклом n -угольнике никакие три диагонали не проходят через одну точку, отличную от вершины, а общее число точек пересечения диагоналей, отличных от вершин n -угольника, равно 330. Найдите n .

In a convex n -sided polygon no three diagonals pass through the same point (other than a vertex), and the total number of intersection points of diagonals (other than the vertices of the n -sided polygon) is 330. Find n .

Answer: 11

2. В выпуклом n -угольнике никакие три диагонали не проходят через одну точку, отличную от вершины, а общее число точек пересечения диагоналей, отличных от вершин n -угольника, равно 495. Найдите n .

In a convex n -sided polygon no three diagonals pass through the same point (other than a vertex), and the total number of intersection points of diagonals (other than the vertices of the n -sided polygon) is 495. Find n .

Answer: 12

3. В выпуклом n -угольнике никакие три диагонали не проходят через одну точку, отличную от вершины, а общее число точек пересечения диагоналей, отличных от вершин n -угольника, равно 1001. Найдите n .

In a convex n -sided polygon no three diagonals pass through the same point (other than a vertex), and the total number of intersection points of diagonals (other than the vertices of the n -sided polygon) is 1001. Find n .

Answer: 14

4. В выпуклом n -угольнике никакие три диагонали не проходят через одну точку, отличную от вершины, а общее число точек пересечения диагоналей, отличных от вершин n -угольника, равно 1365. Найдите n .

In a convex n -sided polygon no three diagonals pass through the same point (other than a vertex), and the total number of intersection points of diagonals (other than the vertices of the n -sided polygon) is 1365. Find n .

Answer: 15

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Каждой точке пересечения диагоналей соответствует четвёрка вершин n -угольника, являющихся концами этих диагоналей, и наоборот. Значит, число точек пересечения диагоналей равно числу способов выбрать четыре вершины из n , т.е. $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = 330$. Подбором находим $n = 11$

– это единственный корень, поскольку разному числу диагоналей соответствует разные количества точек их пересечения.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)*

Each intersection point of the diagonals corresponds to a set of four vertices of the n -sided polygon, which are the ends of these diagonals, and vice versa. This means that the number of intersection points of the diagonals is equal to the number of ways to choose four vertices from n , i.e. $\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = 330$. By that, we find $n = 11$ – this is the only root, since different numbers of diagonals correspond to different numbers of their intersection points.

Task 2.

1. На лесной поляне собрались 29 зайцев и 42 белки, чтобы разделить между собой все собранные яблоки. Оказалось, что есть только один способ распределить эти яблоки так, чтобы любым двум зайцам досталось одинаковое количество яблок, любым двум белкам — тоже поровну (возможно, по столько же яблок, сколько и зайцам), и чтобы при этом никто не ушел без яблок. При каком наибольшем количестве собранных яблок такое возможно?

29 hares and 42 squirrels gathered in a forest clearing to divide all the apples they had collected among themselves. It turned out that there was only one way to distribute these apples in such way that all the hares got an equal share and all the squirrels also got an equal share (possibly the same number of apples as the hares), and no one left without apples. With what greatest number of collected apples is this possible?

Answer: 2436

2. На лесной поляне собрались 25 зайцев и 43 белки, чтобы разделить между собой все собранные яблоки. Оказалось, что есть только один способ распределить эти яблоки так, чтобы любым двум зайцам досталось одинаковое количество яблок, любым двум белкам — тоже поровну (возможно, по столько же яблок, сколько и зайцам), и чтобы при этом никто не ушел без яблок. При каком наибольшем количестве собранных яблок такое возможно?

25 hares and 43 squirrels gathered in a forest clearing to divide all the apples they had collected among themselves. It turned out that there was only one way to distribute these apples in such way that all the hares got an equal share and all the squirrels also got an equal share (possibly the same number of apples as the hares), and no one left without apples. With what greatest number of collected apples is this possible?

Answer: 2150

3. На лесной поляне собрались 35 зайцев и 46 белок, чтобы разделить между собой все собранные яблоки. Оказалось, что есть только один способ распределить эти яблоки так, чтобы любым двум зайцам досталось одинаковое количество яблок, любым двум белкам — тоже поровну (возможно, по столько же яблок, сколько и зайцам), и чтобы при этом никто не ушел без яблок. При каком наибольшем количестве собранных яблок такое возможно?

35 hares and 46 squirrels gathered in a forest clearing to divide all the apples they had collected among themselves. It turned out that there was only one way to distribute these apples in such

way that all the hares got an equal share and all the squirrels also got an equal share (possibly the same number of apples as the hares), and no one left without apples. With what greatest number of collected apples is this possible?

Answer: 3220

4. На лесной поляне собрались 49 зайцев и 32 белки, чтобы разделить между собой все собранные яблоки. Оказалось, что есть только один способ распределить эти яблоки так, чтобы любым двум зайцам досталось одинаковое количество яблок, любым двум белкам — тоже поровну (возможно, по столько же яблок, сколько и зайцам), и чтобы при этом никто не ушел без яблок. При каком наибольшем количестве собранных яблок такое возможно?

49 hares and 32 squirrels gathered in a forest clearing to divide all the apples they had collected among themselves. It turned out that there was only one way to distribute these apples in such way that all the hares got an equal share and all the squirrels also got an equal share (possibly the same number of apples as the hares), and no one left without apples. With what greatest number of collected apples is this possible?

Answer: 3136

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Пусть яблоки как-то распределены между зайцами и белками. Чтобы осуществить другой способ раздачи яблок, потребуется отнять у каждого зайца по равному числу яблок и раздать их поровну белкам (или наоборот). Поэтому общее число яблок, переданных от зайцев белкам (или наоборот), кратно и 29, и 42, т.е. кратно $29 \cdot 42 = 1218$, т.к. 29 и 42 взаимно просты.

Если количество яблок превосходит $2 \cdot 1218 = 2436$, то у зайцев (или у белок) больше 1218 яблок, и можно, отобрав «лишнее», раздать белкам (или, соответственно, зайцам), т.е. существует не менее двух способов раздачи яблок. Если же количество яблок равно 2436, то, раздав зайцам и белкам по 1218 яблок (на всех), мы осуществим единственную возможную раздачу, что и требовалось (зайцам достанется по 42 яблока каждому, а белкам — по 29 яблок).

Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

Let the apples be distributed between the hares and the squirrels. To implement another way of distributing the apples, it is necessary to take an equal number of apples from each hare and distribute them equally among the squirrels (or vice versa). Therefore, the total number of apples transferred from the hares to the squirrels (or vice versa) is a multiple of both 29 and 42, i.e. a multiple of $29 \cdot 42 = 1218$, since 29 and 42 are relatively prime.

If the number of apples exceeds $2 \cdot 1218 = 2436$, then the hares (or squirrels) have more than 1218 apples, and it is possible to take away the «extra» apples and distribute them among the squirrels (or, respectively, the hares), i.e. there are at least two ways of distributing the apples. If the number of apples is 2436, then by distributing 1218 apples to the hares and squirrels, we will carry out the only possible distribution, which is required (the hares will get 42 apples each, and the squirrels will get 29 apples each).

Task 3.

1. Пусть операция « $\diamond$ » удовлетворяет следующим свойствам:

- $x \diamond x = 1$

- $x \diamond (y \diamond z) = z \cdot (x \diamond y)$

Вычислите $(2024 \diamond (16 \diamond 2)) \diamond 5$ и запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.

Let the operation « $\diamond$ » satisfy the following properties:

- $x \diamond x = 1$
- $x \diamond (y \diamond z) = z \cdot (x \diamond y)$

Calculate $(2024 \diamond (16 \diamond 2)) \diamond 5$ and write the answer as an integer or decimal fraction, rounded to hundredths if necessary.

Answer: 50.6

2. Пусть операция « $\diamond$ » удовлетворяет следующим свойствам:

- $x \diamond x = 1$
- $x \diamond (y \diamond z) = z \cdot (x \diamond y)$

Вычислите $(1000 \diamond (16 \diamond 2)) \diamond 5$ и запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.

Let the operation « $\diamond$ » satisfy the following properties:

- $x \diamond x = 1$
- $x \diamond (y \diamond z) = z \cdot (x \diamond y)$

Calculate $(1000 \diamond (16 \diamond 2)) \diamond 5$ and write the answer as an integer or decimal fraction, rounded to hundredths if necessary.

Answer: 25

3. Пусть операция « $\diamond$ » удовлетворяет следующим свойствам:

- $x \diamond x = 1$
- $x \diamond (y \diamond z) = z \cdot (x \diamond y)$

Вычислите $(2024 \diamond (10 \diamond 2)) \diamond 4$ и запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.

Let the operation « $\diamond$ » satisfy the following properties:

- $x \diamond x = 1$
- $x \diamond (y \diamond z) = z \cdot (x \diamond y)$

Calculate $(2024 \diamond (10 \diamond 2)) \diamond 4$ and write the answer as an integer or decimal fraction, rounded to hundredths if necessary.

Answer: 101.2

4. Пусть операция « $\diamond$ » удовлетворяет следующим свойствам:

- $x \diamond x = 1$
- $x \diamond (y \diamond z) = z \cdot (x \diamond y)$

Вычислите $(2025 \diamond (15 \diamond 3)) \diamond 3$ и запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.

Let the operation « $\diamond$ » satisfy the following properties:

- $x \diamond x = 1$
- $x \diamond (y \diamond z) = z \cdot (x \diamond y)$

Calculate $(2025 \diamond (15 \diamond 3)) \diamond 3$ and write the answer as an integer or decimal fraction, rounded to hundredths if necessary.

Answer: 135

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

$$y \cdot (x \diamond y) = x \diamond (y \diamond y) = x \diamond 1 = x \diamond (x \diamond x) = x \cdot (x \diamond x) = x \cdot 1 = x,$$

откуда $(x \diamond y) = x : y$.

$$\text{Тогда } (2024 \diamond (16 \diamond 2)) \diamond 5 = 2024 : 40 = 50.6$$

Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

$$y \cdot (x \diamond y) = x \diamond (y \diamond y) = x \diamond 1 = x \diamond (x \diamond x) = x \cdot (x \diamond x) = x \cdot 1 = x,$$

thus $(x \diamond y) = x : y$.

$$\text{By that, } (2024 \diamond (16 \diamond 2)) \diamond 5 = 2024 : 40 = 50.6$$

Task 4.

1. Сколько есть целых положительных $n \leq 2025$, для которых десятичная запись числа $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ оканчивается на 9?

How many positive integers $n \leq 2025$ make decimal notation of the number $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ end with 9?

Answer: 506

2. Сколько есть целых положительных $n \leq 2025$, для которых десятичная запись числа $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ оканчивается на 5?

How many positive integers $n \leq 2025$ make decimal notation of the number $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ end with 5?

Answer: 1519

3. Сколько есть целых положительных $n \leq 1000$, для которых десятичная запись числа $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ оканчивается на 9?

How many positive integers $n \leq 1000$ make decimal notation of the number $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ end with 9?

Answer: 250

4. Сколько есть целых положительных $n \leq 1000$, для которых десятичная запись числа $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ оканчивается на 5?

How many positive integers $n \leq 1000$ make decimal notation of the number $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ end with 5?

Answer: 750

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Рассмотрим последние цифры каждого слагаемого при $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

n	1	2	3	4	5
1^n	1	1	1	1	1
2^n	2	4	8	6	2
3^n	3	9	7	1	3
4^n	4	6	4	6	4
5^n	5	5	5	5	5

Значит, последняя цифра суммы $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ повторяется с периодом 4. Очевидно, что в каждой четверке подряд идущих целых положительных n найдется ровно одно, для которого упомянутая сумма оканчивается на 9 – значит, среди чисел $1, 2, 3, \dots, 2025$ таких чисел будет ровно 506 (4, 8, 12, $\dots$, 2024).

Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

Lets consider the last digits of each term for $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

n	1	2	3	4	5
1^n	1	1	1	1	1
2^n	2	4	8	6	2
3^n	3	9	7	1	3
4^n	4	6	4	6	4
5^n	5	5	5	5	5

Then the last digit of the sum $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ is repeated with a period of 4. Obviously, in each four consecutive positive integers n there is exactly one for which the sum ends with 9 – by that, among the numbers $1, 2, 3, \dots, 2025$ there will be exactly 506 such numbers (4, 8, 12, $\dots$, 2024).

Task 5. Известно, что у каждого графа есть ровно один друг и один враг среди других графов, и отношения дружбы и вражды между графами всегда взаимны. Король утверждает, что всех графов можно разделить на две равные группы так, чтобы внутри каждой группы не было врагов.

Прав ли король? Обоснуйте свой ответ.

It is known that each count has exactly one friend and one enemy among other counts, and the relations of friendship and enmity between counts are always mutual. The king claims that all counts can be divided into two equal groups in such way that there are no enemies inside each group. Is the king right? Explain your answer.

Answer: Да, король прав / Yes, the king is right

Решение (RUS). Представим отношения между графами в виде графа, вершины которого – графы, синие ребра обозначают дружбу, а красные – вражду. Степень каждой вершины построенного графа равна 2, а значит, этот граф разбивается на циклы, причем в каждом цикле красные и синие ребра чередуются. В первую группу поместим графов из каждого цикла, взятых через одного, а во вторую группу – остальных графов: тогда в группах будет поровну графов, и среди них не будет врагов.

Критерии оценивания:

- дан верный ответ, но обоснование отсутствует либо содержит грубые ошибки – 1 первичный балл;
- дан верный ответ и приведены рассуждения, продолжение которых могло бы привести к верному решению – 2 первичных балла;
- дан верный ответ и приведены в целом верные рассуждения, но нет достаточного объяснения того, как распределить графов по группам – 3 первичных балла;
- дан верный ответ и приведены почти верные рассуждения, содержащие лишь незначительные недостатки – 4 первичных балла;
- приведены полностью верные рассуждения, дан верный ответ, причем явно указано, как распределить графов по группам – 5 первичных баллов.

Solution (ENG). Lets represent the relationships between counts as a graph, the vertices of which are counts, blue edges denote friendship, and red edges denote enmity. The degree of each vertex of the constructed graph is 2, which means that this graph is divided into cycles, and in each cycle the red and blue edges alternate. In the first group we will place every second count from each cycle, and in the second group – the remaining counts: then there will be an equal number of counts in the groups, and there will be no enemies among them.

Criteria:

- the correct answer is given, but the explanation is missing or contains gross errors – 1 pre-point;
- the correct answer is given and reasoning is provided, the continuation of which could lead to the correct solution – 2 pre-points;
- the correct answer is given and generally correct reasoning is provided, but there is no sufficient explanation of how to distribute the counts into groups – 3 pre-points;
- the correct answer is given and almost correct reasoning is provided, containing only minor «gaps» – 4 pre-points;
- completely correct reasoning is provided, the correct answer is given, and it is clearly indicated how to distribute the counts into groups – 5 pre-points.

Task 6. На отрезке $[0, 100]$ несколько попарно непересекающихся интервалов вида (a, b) покрашены в красный цвет так, что нет пары красных точек, расстояние между которыми равно 1. Найдите наибольшую возможную суммарную длину покрашенных интервалов. Обоснуйте свой ответ.

On the segment $[0, 100]$ several pairwise non-intersecting intervals of the form (a, b) are colored red in such way that there is no pair of red points with distance 1 from each other. Find the greatest possible total length of the colored intervals. Explain your answer.

Answer: 50

Решение (RUS). Рассмотрим множество отрезков вида $S_k = [k; k+1]$ для $k = 0, 1, 2, \dots, 99$ и обозначим за A_k множество красных точек, принадлежащих S_k . Заметим, что параллельный перенос каждого A_{2t} на 1 «вправо» не даст совпадений перенесенного множества со множеством A_{2t+1} , иначе нашлись бы две красные точки на расстоянии 1 друг от друга – а значит, суммарная длина интервалов, составляющих множества A_{2t} и A_{2t+1} (для любого $t \in \{0, 1, 2, \dots, 49\}$), не превосходит 1. Из этого следует, что суммарная длина покрашенных интервалов не превосходит 50.

Приведем пример покрашенных интервалов, удовлетворяющих условию задачи, сумма длин которых равна 50: пусть $A_{2t} = (2t, 2t + 0.5)$, $A_{2t+1} = (2t + 1.5, 2t + 2)$ для всех $t \in \{0, 1, 2, \dots, 49\}$.

Критерии оценивания:

- дан неверный ответ – 0 первичных баллов;
- ответ верен, но решения нет, либо в решении содержится значительная ошибка – 0 первичных баллов;
- ответ верен, приведен верный пример красных интервалов, но в рассуждениях содержится ошибка – 1 первичный балл;
- ответ верен, приведено верное доказательство, но пример красных интервалов содержит незначительные ошибки – 4 первичных балла;
- полностью верное решение, верный ответ и корректный пример – 5 первичных баллов.

Solution (ENG). Consider the set of segments of the form $S_k = [k; k+1]$ for $k = 0, 1, 2, \dots, 99$ and denote by A_k the set of red points lying in S_k . Note that the parallel translation of each A_{2t} by 1 «to the right» will not give coincidences of the translated set with the set A_{2t+1} , otherwise there would be two red points at a distance of 1 from each other – therefore the total length of the intervals that make up the sets A_{2t} and A_{2t+1} (for any $t \in \{0, 1, 2, \dots, 49\}$) does not exceed 1. By that, the total length of the colored intervals does not exceed 50.

Lets give an example of colored intervals satisfying the task's conditions, the sum of whose lengths is equal to 50: let $A_{2t} = (2t, 2t + 0.5)$, $A_{2t+1} = (2t + 1.5, 2t + 2)$ for all $t \in \{0, 1, 2, \dots, 49\}$.

Criteria:

- incorrect answer given – 0 pre-points;
- answer is correct, but there is no solution, or the solution has gross error(s) – 0 pre-points;
- answer is correct, the correct example of red intervals is given, but the reasoning contains an error – 1 pre-point;
- answer is correct, the correct proof is given, but the example of red intervals contains minor error(s) – 4 pre-points;
- completely correct solution, correct answer and correct example – 5 pre-points.