

9th degree

Task 1.

1. Спасшийся после кораблекрушения купец, попав в ближайший порт, ждет денежной помощи от друзей. У него осталась лишь одна драгоценность – золотая цепь на шее, и хозяин гостиницы за стол и кров берет по одному звену цепочки в день (в n -й день у хозяина должно быть ровно n звеньев, кусочки цепи можно получать обратно в виде сдачи). Цепь – произведение ювелирного искусства, поэтому купец хочет распилить как можно меньше звеньев, чтобы дожидаться помощи от друзей, которая поступит не более чем через 100 дней.

Какое наименьшее число звеньев цепи придется распилить, чтобы гарантированно дожидаться помощи? Считайте, что длина цепи – более 1000 звеньев.

A merchant who has survived a shipwreck and arrived at the nearest port is waiting for financial help from his friends. He has only one piece of jewelry left - a gold chain around his neck, and the innkeeper takes one link of the chain a day for board and lodging (on the n th day the innkeeper must have exactly n links, and links of the chain can be returned as change). The chain is a work of jewelry art, so the merchant wants to saw off as few links as possible in order to wait for help from his friends, which will arrive in no more than 100 days.

What is the smallest number of links of the chain that must be sawed to be guaranteed to wait for help? Consider that the length of the chain is more than 1000 links.

Answer: 6

2. Спасшийся после кораблекрушения купец, попав в ближайший порт, ждет денежной помощи от друзей. У него осталась лишь одна драгоценность – золотая цепь на шее, и хозяин гостиницы за стол и кров берет по одному звену цепочки в день (в n -й день у хозяина должно быть ровно n звеньев, кусочки цепи можно получать обратно в виде сдачи). Цепь – произведение ювелирного искусства, поэтому купец хочет распилить как можно меньше звеньев, чтобы дожидаться помощи от друзей, которая поступит не более чем через 60 дней.

Какое наименьшее число звеньев цепи придется распилить, чтобы гарантированно дожидаться помощи? Считайте, что длина цепи – более 1000 звеньев.

A merchant who has survived a shipwreck and arrived at the nearest port is waiting for financial help from his friends. He has only one piece of jewelry left - a gold chain around his neck, and the innkeeper takes one link of the chain a day for board and lodging (on the n th day the innkeeper must have exactly n links, and links of the chain can be returned as change). The chain is a work of jewelry art, so the merchant wants to saw off as few links as possible in order to wait for help from his friends, which will arrive in no more than 60 days.

What is the smallest number of links of the chain that must be sawed to be guaranteed to wait for help? Consider that the length of the chain is more than 1000 links.

Answer: 5

3. Спасшийся после кораблекрушения купец, попав в ближайший порт, ждет денежной помощи от друзей. У него осталась лишь одна драгоценность – золотая цепь на шее, и хозяин гостиницы за стол и кров берет по одному звену цепочки в день (в n -й день у хозяина должно

быть ровно n звеньев, кусочки цепи можно получать обратно в виде сдачи). Цепь – произведение ювелирного искусства, поэтому купец хочет распилить как можно меньше звеньев, чтобы дожидаться помощи от друзей, которая поступит не более чем через 200 дней.

Какое наименьшее число звеньев цепи придется распилить, чтобы гарантированно дожидаться помощи? Считайте, что длина цепи – более 1000 звеньев.

A merchant who has survived a shipwreck and arrived at the nearest port is waiting for financial help from his friends. He has only one piece of jewelry left - a gold chain around his neck, and the innkeeper takes one link of the chain a day for board and lodging (on the n th day the innkeeper must have exactly n links, and links of the chain can be returned as change). The chain is a work of jewelry art, so the merchant wants to saw off as few links as possible in order to wait for help from his friends, which will arrive in no more than 200 days.

What is the smallest number of links of the chain that must be sawed to be guaranteed to wait for help? Consider that the length of the chain is more than 1000 links.

Answer: 7

4. Спасшийся после кораблекрушения купец, попав в ближайший порт, ждет денежной помощи от друзей. У него осталась лишь одна драгоценность – золотая цепь на шее, и хозяин гостиницы за стол и кров берет по одному звену цепочки в день (в n -й день у хозяина должно быть ровно n звеньев, кусочки цепи можно получать обратно в виде сдачи). Цепь – произведение ювелирного искусства, поэтому купец хочет распилить как можно меньше звеньев, чтобы дожидаться помощи от друзей, которая поступит не более чем через 300 дней.

Какое наименьшее число звеньев цепи придется распилить, чтобы гарантированно дожидаться помощи? Считайте, что длина цепи – более 1000 звеньев.

A merchant who has survived a shipwreck and arrived at the nearest port is waiting for financial help from his friends. He has only one piece of jewelry left - a gold chain around his neck, and the innkeeper takes one link of the chain a day for board and lodging (on the n th day the innkeeper must have exactly n links, and links of the chain can be returned as change). The chain is a work of jewelry art, so the merchant wants to saw off as few links as possible in order to wait for help from his friends, which will arrive in no more than 300 days.

What is the smallest number of links of the chain that must be sawed to be guaranteed to wait for help? Consider that the length of the chain is more than 1000 links.

Answer: 8

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

После первого распила у нас 1 (распиленное) звено и остальная (разомкнутая) цепочка. Если в первый день купец не получил денег, ему нужно распилить ещё одно звено. Но где? Если распилить крайнее звено, оплатить можно лишь второй день. Можно оставить с краю два звена, а третье распилить. Тогда будем иметь три кусочка длиной 1, 2 и 97, и второй день можно оплатить двумя способами: 1+1 или 2 (получив 1 сдачей), а всего кусочков хватит для оплаты 4 дней. Но выгоднее распилить четвертое от края звено: 1, 3, 1 – в этом случае двух распилов хватит для оплаты 5 дней. Далее, рассуждая так же, делаем третий распил, оставляя от края кусочек в 7 звеньев: 5 дней подряд уже оплачено, 6-й оплатим всеми предыдущими + третьим распиленным звеном, и так далее.

В случае цепи длиной 1000 звеньев и необходимости прожить в гостинице до 100 дней имеем следующие 5 последовательных распилов и получившиеся кусочки (где «;» – разделитель распилов): 1; 3,1; 7,1; 15,1; 31,1, после чего останется кусок длиной не менее 939 звеньев – значит, необходим 6-й распил. Итак, придется сделать 6 распилов.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)*

After the first cut, we have 1 (sawn) link and the remaining (open) chain. If the merchant did not receive money on the first day, he needs to saw another link. But where? If you saw the outermost link, you can only pay for the second day. You can leave two links at the edge and saw the third. Then we will have three pieces 1, 2 and 97 long, and the second day can be paid in two ways: $1 + 1$ or 2 (receiving 1 in change), and in total there will be enough pieces to pay for 4 days. But it is more profitable to saw the fourth link from the edge: 1, 3, 1 – in this case, two cuts will be enough to pay for 5 days. Then, reasoning in the same way, we make a third cut, leaving a piece of 7 links from the edge: 5 days in a row have already been paid, the 6th will be paid with all the previous ones + the third sawn link, and so on.

In the case of a chain 1000 links long and the need to stay in a hotel for up to 100 days, we have the following 5 consecutive cuts and the resulting pieces (where «;» is the cut separator): 1; 3,1; 7,1; 15,1; 31,1, after which there will be a piece no less than 939 links long which means a 6th cut is needed. So, the merchant will have to make 6 cuts.

Task 2.

1. Рассмотрим рекурсивную функцию:

$$F(n) = \begin{cases} n - 5, & \text{если } n > 2024 \\ F(F(n + 6)), & \text{если } n \leq 2024 \end{cases}$$

Сколько корней в натуральных (положительных целых) числах имеет уравнение $F(n) = 2020$? Если оно не имеет корней, либо корней бесконечно много, то введите 0 в поле для ответа.

Consider the recursive function:

$$F(n) = \begin{cases} n - 5, & \text{if } n > 2024 \\ F(F(n + 6)), & \text{if } n \leq 2024 \end{cases}$$

How many roots (in positive integers) does the equation $F(n) = 2020$ have? If it has no roots, or there are infinitely many roots, then enter 0 as your answer.

Answer: 2025

2. Рассмотрим рекурсивную функцию:

$$F(n) = \begin{cases} n - 5, & \text{если } n > 2025 \\ F(F(n + 6)), & \text{если } n \leq 2025 \end{cases}$$

Сколько корней в натуральных (положительных целых) числах имеет уравнение $F(n) = 2020$? Если оно не имеет корней, либо корней бесконечно много, то введите 0 в поле для ответа.

Consider the recursive function:

$$F(n) = \begin{cases} n - 5, & \text{if } n > 2025 \\ F(F(n + 6)), & \text{if } n \leq 2025 \end{cases}$$

How many roots (in positive integers) does the equation $F(n) = 2020$ have? If it has no roots, or there are infinitely many roots, then enter 0 as your answer.

Answer: 2026

3. Рассмотрим рекурсивную функцию:

$$F(n) = \begin{cases} n - 5, & \text{если } n > 2024 \\ F(F(n + 6)), & \text{если } n \leq 2024 \end{cases}$$

Найдите сумму всех положительных целых корней уравнения $F(n) = 2025$. Если оно не имеет корней, либо корней бесконечно много, то введите 0 в поле для ответа.

Consider the recursive function:

$$F(n) = \begin{cases} n - 5, & \text{if } n > 2024 \\ F(F(n + 6)), & \text{if } n \leq 2024 \end{cases}$$

Find the sum of all positive integer roots of the equation $F(n) = 2025$. If it has no roots, or there are infinitely many roots, then enter 0 as your answer.

Answer: 2030

4. Рассмотрим рекурсивную функцию:

$$F(n) = \begin{cases} n - 5, & \text{если } n > 2024 \\ F(F(n + 6)), & \text{если } n \leq 2024 \end{cases}$$

Найдите сумму всех положительных целых корней уравнения $F(n) = 2024$. Если оно не имеет корней, либо корней бесконечно много, то введите 0 в поле для ответа.

Consider the recursive function:

$$F(n) = \begin{cases} n - 5, & \text{if } n > 2024 \\ F(F(n + 6)), & \text{if } n \leq 2024 \end{cases}$$

Find the sum of all positive integer roots of the equation $F(n) = 2024$. If it has no roots, or there are infinitely many roots, then enter 0 as your answer.

Answer: 2029

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Для любого $n \geq 2025$ очевидно без всякой рекурсии, что $F(n) = n - 5$. Вычислим $F(n)$ для нескольких $n \leq 2024$:

$$F(2024) = F(F(2030)) = F(2025) = 2020$$

$$F(2023) = F(F(2029)) = F(2024) = 2020$$

$$F(2022) = F(F(2038)) = F(2023) = 2020$$

$$F(2021) = F(F(2027)) = F(2022) = 2020$$

$$F(2020) = F(F(2026)) = F(2021) = 2020$$

Докажем индукцией по k следующее утверждение: $F(2024 - k) = F(2023 - k) = F(2022 - k) = F(2021 - k) = F(2020 - k) = 2020$ любого $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2019\}$. База индукции уже доказана в примерах выше.

Пусть для некоторого $k > 0$ выполнено $F(2024 - k) = F(2023 - k) = F(2022 - k) = F(2021 - k) = F(2020 - k) = 2020$. Тогда имеем:

$$F(2024 - (k + 1)) = F(2023 - k) = 2020 \text{ по предположению индукции;}$$

$$F(2023 - (k + 1)) = F(2022 - k) = 2020 \text{ по предположению индукции;}$$

$$F(2022 - (k + 1)) = F(2021 - k) = 2020 \text{ по предположению индукции;}$$

$$F(2021 - (k + 1)) = F(2020 - k) = 2020 \text{ по предположению индукции;}$$

$$F(2020 - (k + 1)) = F(2019 - k) = F(F(2019 - k + 6) = F(F(2025 - k))) = F(F(2024 - (k - 1))) = F(2020) = 2020.$$

Таким образом, утверждение доказано.

Итак, $F(n) = 2020$ для всех натуральных $n \leq 2025$ – таких ровно 2025.

Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

For any $n \geq 2025$ it is obvious without any recursion that $F(n) = n - 5$. Lets calculate $F(n)$ for several $n \leq 2024$:

$$F(2024) = F(F(2030)) = F(2025) = 2020$$

$$F(2023) = F(F(2029)) = F(2024) = 2020$$

$$F(2022) = F(F(2038)) = F(2023) = 2020$$

$$F(2021) = F(F(2027)) = F(2022) = 2020$$

$$F(2020) = F(F(2026)) = F(2021) = 2020$$

Lets prove the following statement by induction on k : $F(2024 - k) = F(2023 - k) = F(2022 - k) = F(2021 - k) = F(2020 - k) = 2020$ for any $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2019\}$. The induction base has already been proved in the examples above.

Let $F(2024 - k) = F(2023 - k) = F(2022 - k) = F(2021 - k) = F(2020 - k) = 2020$ be satisfied for some $k > 0$. Then we have:

$$F(2024 - (k + 1)) = F(2023 - k) = 2020 \text{ by induction hypothesis;}$$

$$F(2023 - (k + 1)) = F(2022 - k) = 2020 \text{ by induction hypothesis;}$$

$$F(2022 - (k + 1)) = F(2021 - k) = 2020 \text{ by induction hypothesis;}$$

$$F(2021 - (k + 1)) = F(2020 - k) = 2020 \text{ by induction hypothesis;}$$

$$F(2020 - (k + 1)) = F(2019 - k) = F(F(2019 - k + 6) = F(F(2025 - k))) = F(F(2024 - (k - 1))) = F(2020) = 2020.$$

By that, the statement is proven.

So, $F(n) = 2020$ for all positive integers $n \leq 2025$ – there are exactly 2025 of them.

Task 3.

1. Известно, что есть ровно 2^{2024} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее нечётное число элементов. Чему равно количество элементов множества A ?

There are exactly 2^{2024} ways to select from a finite set A a subset containing an odd number of elements. What is the number of elements in the set A ?

Answer: 2025

2. Известно, что есть ровно 2^{2024} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее чётное (возможное, нулевое) число элементов. Чему равно количество элементов множества A ?

There are exactly 2^{2024} ways to select from a finite set A a subset containing an even (possibly, zero) number of elements. What is the number of elements in the set A ?

Answer: 2025

3. Известно, что есть ровно 2^{101} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее нечётное число элементов. Чему равно количество элементов множества A ?

There are exactly 2^{101} ways to select from a finite set A a subset containing an odd number of elements. What is the number of elements in the set A ?

Answer: 102

4. Известно, что есть ровно 2^{101} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее чётное (возможное, нулевое) число элементов. Чему равно количество элементов множества A ?

There are exactly 2^{101} ways to select from a finite set A a subset containing an even (possibly, zero) number of elements. What is the number of elements in the set A ?

Answer: 102

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)*

Зафиксируем некоторый элемент x множества A . Теперь разобьём все его подмножества на пары, отличающиеся только наличием (либо отсутствием) элемента x . Очевидно, в каждой паре одно подмножество содержит чётное (возможно, нулевое) число элементов, а другое – нечётное число элементов. Таким образом, «чётных» подмножеств столько же, сколько и «нечётных» – значит, если множество A содержит n элементов и, как следствие, 2^n подмножеств (включая пустое), то количество «нечётных» подмножеств равно $2^n : 2 = 2^{n-1}$. По условию это количество равно 2^{2024} , откуда $n = 2025$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)*

Lets fix some element x of the set A . Now we divide all its subsets into pairs that differ only in the presence (or absence) of element x . Obviously, in each pair one subset contains an even (possibly zero) number of elements, and the other – an odd number of elements. Thus, there are as many «even» subsets as «odd» ones – by that, if set A contains n elements and (as a consequence) 2^n subsets (including the empty one), then the number of «odd» subsets is $2^n : 2 = 2^{n-1}$. By the task's condition, the number is 2^{2024} , thus $n = 2025$.

Task 4.

1. Некоторая бесконечная последовательность натуральных чисел обладает следующим свойством: для любого целого положительного n среднее арифметическое первых $n + 1$ членов этой последовательности отличается от среднего арифметического ее первых n членов на одно и то же целое положительное число. Также известно, что некоторый член этой последовательности равен сумме всех предыдущих членов.

Сколько существует различных последовательностей, удовлетворяющих описанным выше условиям и содержащих число 2024?

Some infinite sequence of positive integers has the following property: for any n , the arithmetic mean of the first $n + 1$ terms of this sequence differs from the arithmetic mean of its first n terms by the same positive integer. It is also known that some term of this sequence is equal to the sum of all previous terms.

How many different sequences are there that satisfy the conditions described above and contain the number 2024?

Answer: 12

2. Некоторая бесконечная последовательность натуральных чисел обладает следующим свойством: для любого целого положительного n среднее арифметическое первых $n + 1$ членов этой последовательности отличается от среднего арифметического ее первых n членов на одно и то же целое положительное число. Также известно, что некоторый член этой последовательности равен сумме всех предыдущих членов.

Сколько существует различных последовательностей, удовлетворяющих описанным выше условиям и содержащих число 2025?

Some infinite sequence of positive integers has the following property: for any n , the arithmetic mean of the first $n + 1$ terms of this sequence differs from the arithmetic mean of its first n terms by the same positive integer. It is also known that some term of this sequence is equal to the sum of all previous terms.

How many different sequences are there that satisfy the conditions described above and contain the number 2025?

Answer: 0

3. Некоторая бесконечная последовательность натуральных чисел обладает следующим свойством: для любого целого положительного n среднее арифметическое первых $n + 1$ членов этой последовательности отличается от среднего арифметического ее первых n членов на одно и то же целое положительное число. Также известно, что некоторый член этой последовательности равен сумме всех предыдущих членов.

Сколько существует различных последовательностей, удовлетворяющих описанным выше условиям и содержащих число 100?

Some infinite sequence of positive integers has the following property: for any n , the arithmetic mean of the first $n + 1$ terms of this sequence differs from the arithmetic mean of its first n terms by the same positive integer. It is also known that some term of this sequence is equal to the sum of all previous terms.

How many different sequences are there that satisfy the conditions described above and contain the number 100?

Answer: 6

4. Некоторая бесконечная последовательность натуральных чисел обладает следующим свойством: для любого целого положительного n среднее арифметическое первых $n + 1$ членов этой последовательности отличается от среднего арифметического ее первых n членов на одно и то же целое положительное число. Также известно, что некоторый член этой последовательности равен сумме всех предыдущих членов.

Сколько существует различных последовательностей, удовлетворяющих описанным выше условиям и содержащих число 99?

Some infinite sequence of positive integers has the following property: for any n , the arithmetic mean of the first $n + 1$ terms of this sequence differs from the arithmetic mean of its first n terms by the same positive integer. It is also known that some term of this sequence is equal to the sum of all previous terms.

How many different sequences are there that satisfy the conditions described above and contain the number 99?

Answer: 0

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots$ – произвольная (фиксированная) последовательность, обладающая свойствами, описанных в условиях задачи; для упрощения обозначений обозначим первый элемент этой последовательности a (то есть $a_1 = a$). Для любого натурального n обозначим S_n сумму первых n членов последовательности; в частности, $S_1 = a_1 = a$.

По условию задачи, для любого натурального n имеем $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n}$ – это некоторая положительная целая константа, обозначим ее через d ; следовательно, $\frac{S_1}{1}, \frac{S_2}{2}, \frac{S_3}{3}, \dots$ – целочисленная арифметическая прогрессия: $\frac{S_n}{n} = a + (n-1)d$ и $S_n = na + n(n-1)d$. Поэтому для любого натурального n получаем $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = ((n+1)a + (n+1)nd) - (na + n(n-1)d) = a + 2nd$ и $a_n = a + 2(n-1)d$.

По условию задачи, для некоторого натурального k выполнено $S_k = a_{k+1}$, то есть $ka + k(k-1)d = a + 2kd$ или $(k-1)a = k(3-k)d$; так как a и d – целые положительные числа, то $k = 2$, откуда $a = 2d$, и для любого натурального n получаем $a_n = a + 2(n-1)d = a + (n-1)a = na$.

В таком случае, $a_m = 2024$ (для некоторого натурального m) означает, что $ma = 2md = 2024$. Следовательно, число возможных значений m равно количеству натуральных делителей числа $2024/2 = 2^2 \cdot 11 \cdot 23$, т.е. $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

Let $a_1, a_2, a_3, \dots$ be an arbitrary (fixed) sequence with the properties described in the task's formulation; to simplify the notation, we denote the first element of the sequence by a (by that, $a_1 = a$). For any positive integer n we denote by S_n the sum of the first n terms of the sequence; in particular, $S_1 = a_1 = a$.

For any positive integer n we have $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n}$ – this is some positive integer constant, we denote it by d ; therefore, $\frac{S_1}{1}, \frac{S_2}{2}, \frac{S_3}{3}, \dots$ is an integer arithmetic progression: $\frac{S_n}{n} = a + (n-1)d$ and $S_n = na + n(n-1)d$. Therefore, for any positive integer n we obtain $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = ((n+1)a + (n+1)nd) - (na + n(n-1)d) = a + 2nd$ and $a_n = a + 2(n-1)d$.

For some positive integer k we have $S_k = a_{k+1}$, thus $ka + k(k-1)d = a + 2kd$ or $(k-1)a = k(3-k)d$; since a and d are positive integers, then $k = 2$, whence $a = 2d$, and for any positive integer n we obtain $a_n = a + 2(n-1)d = a + (n-1)a = na$.

In this case, $a_m = 2024$ (for some natural m) means that $ma = 2md = 2024$. By that, the number of possible values of m is equal to the number of positive integer divisors of $2024/2 = 2^2 \cdot 11 \cdot 23$ which is $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Task 5. Верны ли следующие утверждения для любого многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами?

1. Если многочлен $P(x)$ имеет вещественный корень, то и многочлен $P(P(x))$ имеет вещественный корень.
2. Если многочлен $P(P(x))$ имеет вещественный корень, то и многочлен $P(x)$ имеет вещественный корень.

Обоснуйте свой ответ.

Are the following statements true for any polynomial $P(x)$ with real coefficients?

1. If the polynomial $P(x)$ has a real root, then the polynomial $P(P(x))$ has a real root.
2. If the polynomial $P(P(x))$ has a real root, then the polynomial $P(x)$ has a real root.

Explain your answer.

Решение (RUS). Докажем для любого многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами, что если $P(P(x))$ имеет вещественный корень, то и многочлен $P(x)$ имеет вещественный корень. Действительно, если $a \in \mathbb{R}$ – вещественный корень $P(P(x))$, т.е. $P(P(a)) = 0$, то существует такое $b = P(a) \in \mathbb{R}$, что $P(P(a)) = P(b) = 0$, то есть b – вещественный корень $P(x)$.

Приведем пример многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами, который имеет вещественный корень, но при этом многочлен $P(P(x))$ не имеет ни одного вещественного корня: пусть $P(x) = x^2 + 3x + 2$ – этот многочлен имеет два вещественных корня: -2 и -1 , поэтому корни $P(P(x))$ – это корни уравнений $x^2 + 3x + 2 = -2$ и $x^2 + 3x + 2 = -1$, являющиеся комплексными числами.

Критерии оценивания:

- приведен контрпример в п.1: +2 первичных балла;
- приведено верное доказательство в п.2: +3 первичных балла;
- не показано, почему контрпример в п.1 является таковым: -1 первичный балл;
- не обозначен корень многочлена в п.2: -1 первичный балл.

Solution (ENG). Lets prove for any polynomial $P(x)$ with real coefficients that if $P(P(x))$ has a real root, then the polynomial $P(x)$ also has a real root. Indeed, if $a \in \mathbb{R}$ is a real root of $P(P(x))$, i.e. $P(P(a)) = 0$, then there exists $b = P(a) \in \mathbb{R}$ such that $P(P(a)) = P(b) = 0$, i.e. b is a real root of $P(x)$.

Lets give an example of a polynomial $P(x)$ with real coefficients that has a real root, but the polynomial $P(P(x))$ does not have any real roots: let $P(x) = x^2 + 3x + 2$ – this polynomial has two real roots: -2 and -1 , therefore the roots of $P(P(x))$ are the roots of the equations $x^2 + 3x + 2 = -2$ and $x^2 + 3x + 2 = -1$, which are complex numbers.

Criteria:

- a counterexample is given in p.1: +2 pre-points;
- a correct proof is given in p.2: +3 pre-points;
- it is not shown why the counterexample in p.1 is a counterexample: -1 pre-point;
- the root of the polynomial in p.2 is not indicated: -1 pre-point.

Task 6. Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что существует окружность, касающаяся сторон угла BAD и продолжений сторон BC и CD . Найдите AD , если $AB = 7$, $BC = 8$, $CD = 5$. Обоснуйте свой ответ.

Given a quadrilateral $ABCD$. It is known that there is a circle tangent to the sides of angle BAD and the extensions of sides BC and CD . Find AD while $AB = 7$, $BC = 8$, $CD = 5$. Explain your answer.

Answer: 10

Решение (RUS). Возможны четыре взаимных расположения $ABCD$ и упомянутой окружности (см. рисунки ниже). Отметим, что варианты 3 и 4 (на картинках ниже) невозможны, т.к. подсчет AD в этих случаях приводит к $AD < 0$. Осталось рассмотреть случаи 1 и 2 (верхние картинки).

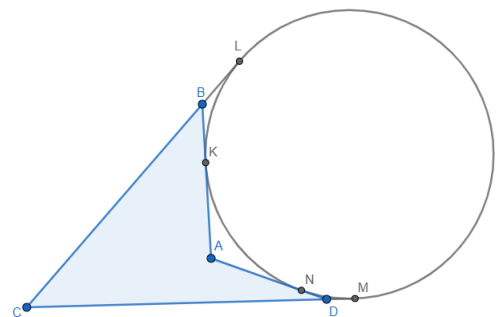
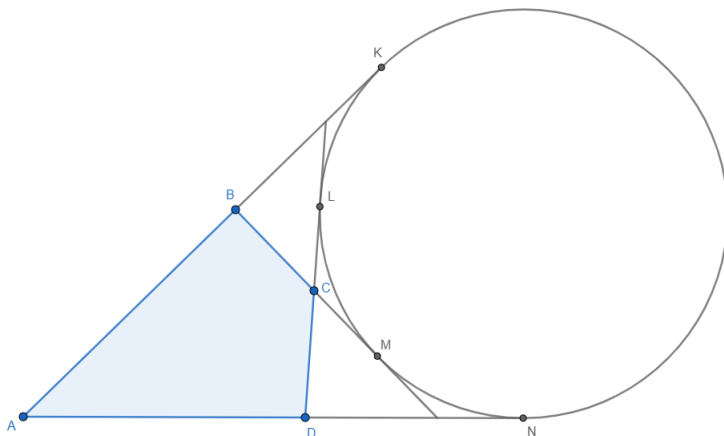
Согласно свойству касательных к окружности, получим $BM = BK$ и $AB + BM = AK = AN = AD + DL$, т.е.

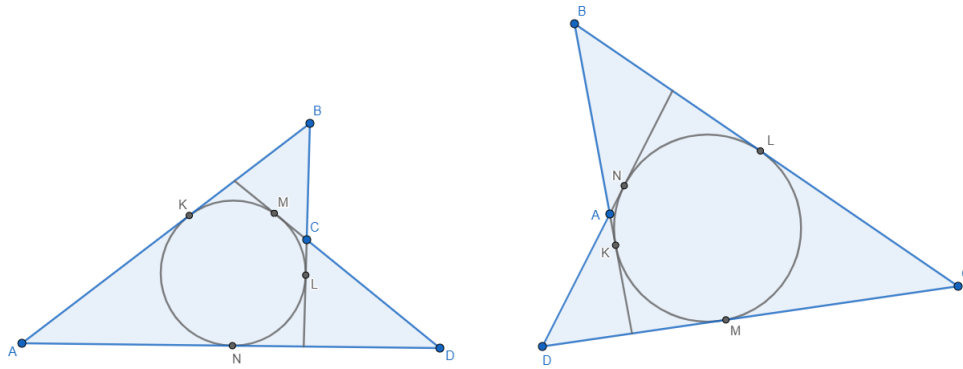
$$AB + BC + CM = AD + DC + CL$$

Учитывая $CL = CM$, получаем $AB + BC = AD + DC$, откуда $AD = 10$. Второй возможный случай рассматривается аналогично.

Критерии оценивания:

- дан верный ответ – 1 первичный балл;
- рассмотрен невозможный случай, и доказано противоречие условию – 2 первичных балла;
- рассмотрен возможный случай, дан верный ответ – 3 первичных балла;
- рассмотрены все варианты, дан верный ответ – 5 первичных баллов.





Solution (ENG). There are four possible mutual arrangements of $ABCD$ and the circle mentioned (see the pictures above). Note that options 3 and 4 (the two lower pictures) are impossible, since calculating AD in these cases leads to $AD < 0$. It remains to consider cases 1 and 2 (the upper pictures).

According to the property of tangents to a circle, we get $BM = BK$ and $AB + BM = AK = AN = AD + DL$, i.e.

$$AB + BC + CM = AD + DC + CL$$

Considering $CL = CM$, we get $AB + BC = AD + DC$, and by that $AD = 10$. The second possible case is considered similarly.

Criteria:

- the correct answer is given – 1 pre-point;
- one impossible arrangement is considered and its inconsistency is proven – 2 pre-points;
- one possible arrangement is considered, the correct answer is given – 3 pre-points;
- all arrangements are considered, the correct answer is given – 5 pre-points.