

9th degree

Task 1.

1. В выпуклом n -угольнике никакие три диагонали не проходят через одну точку, отличную от вершины, а общее число точек пересечения диагоналей, отличных от вершин n -угольника, равно 330. Найдите n .

In a convex n -sided polygon no three diagonals pass through the same point (other than a vertex), and the total number of intersection points of diagonals (other than the vertices of the n -sided polygon) is 330. Find n .

Answer: 11

2. В выпуклом n -угольнике никакие три диагонали не проходят через одну точку, отличную от вершины, а общее число точек пересечения диагоналей, отличных от вершин n -угольника, равно 495. Найдите n .

In a convex n -sided polygon no three diagonals pass through the same point (other than a vertex), and the total number of intersection points of diagonals (other than the vertices of the n -sided polygon) is 495. Find n .

Answer: 12

3. В выпуклом n -угольнике никакие три диагонали не проходят через одну точку, отличную от вершины, а общее число точек пересечения диагоналей, отличных от вершин n -угольника, равно 1001. Найдите n .

In a convex n -sided polygon no three diagonals pass through the same point (other than a vertex), and the total number of intersection points of diagonals (other than the vertices of the n -sided polygon) is 1001. Find n .

Answer: 14

4. В выпуклом n -угольнике никакие три диагонали не проходят через одну точку, отличную от вершины, а общее число точек пересечения диагоналей, отличных от вершин n -угольника, равно 1365. Найдите n .

In a convex n -sided polygon no three diagonals pass through the same point (other than a vertex), and the total number of intersection points of diagonals (other than the vertices of the n -sided polygon) is 1365. Find n .

Answer: 15

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Каждой точке пересечения диагоналей соответствует четвёрка вершин n -угольника, являющихся концами этих диагоналей, и наоборот. Значит, число точек пересечения диагоналей равно числу способов выбрать четыре вершины из n , т.е. $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = 330$. Подбором находим $n = 11$

– это единственный корень, поскольку разному числу диагоналей соответствует разные количества точек их пересечения.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)*

Each intersection point of the diagonals corresponds to a set of four vertices of the n -sided polygon, which are the ends of these diagonals, and vice versa. This means that the number of intersection points of the diagonals is equal to the number of ways to choose four vertices from n , i.e. $\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = 330$. By that, we find $n = 11$ – this is the only root, since different numbers of diagonals correspond to different numbers of their intersection points.

Task 2.

1. На лесной поляне собрались 29 зайцев и 42 белки, чтобы разделить между собой все собранные яблоки. Оказалось, что есть только один способ распределить эти яблоки так, чтобы любым двум зайцам досталось одинаковое количество яблок, любым двум белкам — тоже поровну (возможно, по столько же яблок, сколько и зайцам), и чтобы при этом никто не ушел без яблок. При каком наибольшем количестве собранных яблок такое возможно?

29 hares and 42 squirrels gathered in a forest clearing to divide all the apples they had collected among themselves. It turned out that there was only one way to distribute these apples in such way that all the hares got an equal share and all the squirrels also got an equal share (possibly the same number of apples as the hares), and no one left without apples. With what greatest number of collected apples is this possible?

Answer: 2436

2. На лесной поляне собрались 25 зайцев и 43 белки, чтобы разделить между собой все собранные яблоки. Оказалось, что есть только один способ распределить эти яблоки так, чтобы любым двум зайцам досталось одинаковое количество яблок, любым двум белкам — тоже поровну (возможно, по столько же яблок, сколько и зайцам), и чтобы при этом никто не ушел без яблок. При каком наибольшем количестве собранных яблок такое возможно?

25 hares and 43 squirrels gathered in a forest clearing to divide all the apples they had collected among themselves. It turned out that there was only one way to distribute these apples in such way that all the hares got an equal share and all the squirrels also got an equal share (possibly the same number of apples as the hares), and no one left without apples. With what greatest number of collected apples is this possible?

Answer: 2150

3. На лесной поляне собрались 35 зайцев и 46 белок, чтобы разделить между собой все собранные яблоки. Оказалось, что есть только один способ распределить эти яблоки так, чтобы любым двум зайцам досталось одинаковое количество яблок, любым двум белкам — тоже поровну (возможно, по столько же яблок, сколько и зайцам), и чтобы при этом никто не ушел без яблок. При каком наибольшем количестве собранных яблок такое возможно?

35 hares and 46 squirrels gathered in a forest clearing to divide all the apples they had collected among themselves. It turned out that there was only one way to distribute these apples in such

way that all the hares got an equal share and all the squirrels also got an equal share (possibly the same number of apples as the hares), and no one left without apples. With what greatest number of collected apples is this possible?

Answer: 3220

4. На лесной поляне собрались 49 зайцев и 32 белки, чтобы разделить между собой все собранные яблоки. Оказалось, что есть только один способ распределить эти яблоки так, чтобы любым двум зайцам досталось одинаковое количество яблок, любым двум белкам — тоже поровну (возможно, по столько же яблок, сколько и зайцам), и чтобы при этом никто не ушел без яблок. При каком наибольшем количестве собранных яблок такое возможно?

49 hares and 32 squirrels gathered in a forest clearing to divide all the apples they had collected among themselves. It turned out that there was only one way to distribute these apples in such way that all the hares got an equal share and all the squirrels also got an equal share (possibly the same number of apples as the hares), and no one left without apples. With what greatest number of collected apples is this possible?

Answer: 3136

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)*

Пусть яблоки как-то распределены между зайцами и белками. Чтобы осуществить другой способ раздачи яблок, потребуется отнять у каждого зайца по равному числу яблок и раздать их поровну белкам (или наоборот). Поэтому общее число яблок, переданных от зайцев белкам (или наоборот), кратно и 29, и 42, т.е. кратно $29 \cdot 42 = 1218$, т.к. 29 и 42 взаимно просты.

Если количество яблок превосходит $2 \cdot 1218 = 2436$, то у зайцев (или у белок) больше 1218 яблок, и можно, отобрав «лишнее», раздать белкам (или, соответственно, зайцам), т.е. существует не менее двух способов раздачи яблок. Если же количество яблок равно 2436, то, раздав зайцам и белкам по 1218 яблок (на всех), мы осуществим единственную возможную раздачу, что и требовалось (зайцам достанется по 42 яблока каждому, а белкам — по 29 яблок).

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)*

Let the apples be distributed between the hares and the squirrels. To implement another way of distributing the apples, it is necessary to take an equal number of apples from each hare and distribute them equally among the squirrels (or vice versa). Therefore, the total number of apples transferred from the hares to the squirrels (or vice versa) is a multiple of both 29 and 42, i.e. a multiple of $29 \cdot 42 = 1218$, since 29 and 42 are relatively prime.

If the number of apples exceeds $2 \cdot 1218 = 2436$, then the hares (or squirrels) have more than 1218 apples, and it is possible to take away the «extra» apples and distribute them among the squirrels (or, respectively, the hares), i.e. there are at least two ways of distributing the apples. If the number of apples is 2436, then by distributing 1218 apples to the hares and squirrels, we will carry out the only possible distribution, which is required (the hares will get 42 apples each, and the squirrels will get 29 apples each).

Task 3.

1. Даны точка A и прямая l , по которой с постоянной скоростью движется точка B . Длины отрезка AB в моменты времени 0, 1, 5 равны соответственно 1, 1, $\sqrt{3}$. Найдите длину отрезка

AB в момент времени 10. Представьте ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.

Given a point A and a line l along which a point B moves at a constant speed. The lengths of the segment AB at times 0, 1, 5 are 1, 1, $\sqrt{3}$, respectively. Find the length of the segment AB at time 10. Express your answer as an integer or a decimal fraction, rounded to hundredths if necessary.

Answer: 3.16

2. Даны точка A и прямая l , по которой с постоянной скоростью движется точка B . Длины отрезка AB в моменты времени 0, 1, 5 равны соответственно 1, 1, $\sqrt{5}$. Найдите длину отрезка AB в момент времени 10. Представьте ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.

Given a point A and a line l along which a point B moves at a constant speed. The lengths of the segment AB at times 0, 1, 5 are 1, 1, $\sqrt{5}$, respectively. Find the length of the segment AB at time 10. Express your answer as an integer or a decimal fraction, rounded to hundredths if necessary.

Answer: 4.36

3. Даны точка A и прямая l , по которой с постоянной скоростью движется точка B . Длины отрезка AB в моменты времени 0, 1, 5 равны соответственно 1, $\sqrt{3}$, 5. Найдите длину отрезка AB в момент времени 10. Представьте ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.

Given a point A and a line l along which a point B moves at a constant speed. The lengths of the segment AB at times 0, 1, 5 are 1, $\sqrt{3}$, 5, respectively. Find the length of the segment AB at time 10. Express your answer as an integer or a decimal fraction, rounded to hundredths if necessary.

Answer: 9.17

4. Даны точка A и прямая l , по которой с постоянной скоростью движется точка B . Длины отрезка AB в моменты времени 0, 1, 5 равны соответственно 1, $\sqrt{3}$, 7. Найдите длину отрезка AB в момент времени 10. Представьте ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.

Given a point A and a line l along which a point B moves at a constant speed. The lengths of the segment AB at times 0, 1, 5 are 1, $\sqrt{3}$, 7, respectively. Find the length of the segment AB at time 10. Express your answer as an integer or a decimal fraction, rounded to hundredths if necessary.

Answer: 13.86

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Отметим, что квадрат длины отрезка AB меняется по квадратичному закону $f(t) = at^2 + bt + c$, что следует из теоремы Пифагора для треугольника ABC , где C – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую l .

Согласно условию задачи, $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(5) = 3$, тогда, согласно формуле Лагранжа имеем

$$f(t) = 1 \cdot \frac{(x-1)(x-5)}{(0-1)(0-5)} + 1 \cdot \frac{x(x-5)}{(1-0)(1-5)} + 3 \cdot \frac{x(x-1)}{(5-0)(5-1)} = 0.1x^2 - 0.1x + 1,$$

откуда $f(10) = 10$. Наконец, $\sqrt{10} \approx 3.16$.

Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

Note that the square of the length of the segment AB changes according to a quadratic law $f(t) = at^2 + bt + c$, which follows from the Pythagorean theorem for triangle ABC , where C is the base of the perpendicular dropped from point A to the line l .

According to the task's formulation, $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(5) = 3$, then after applying the Lagrange formula, we have

$$f(t) = 1 \cdot \frac{(x-1)(x-5)}{(0-1)(0-5)} + 1 \cdot \frac{x(x-5)}{(1-0)(1-5)} + 3 \cdot \frac{x(x-1)}{(5-0)(5-1)} = 0.1x^2 - 0.1x + 1,$$

thus $f(10) = 10$. Finally, $\sqrt{10} \approx 3.16$.

Task 4.

1. Сколько есть целых положительных $n \leq 2025$, для которых десятичная запись числа $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ оканчивается на 9?

How many positive integers $n \leq 2025$ make decimal notation of the number $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ end with 9?

Answer: 506

2. Сколько есть целых положительных $n \leq 2025$, для которых десятичная запись числа $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ оканчивается на 5?

How many positive integers $n \leq 2025$ make decimal notation of the number $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ end with 5?

Answer: 1519

3. Сколько есть целых положительных $n \leq 1000$, для которых десятичная запись числа $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ оканчивается на 9?

How many positive integers $n \leq 1000$ make decimal notation of the number $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ end with 9?

Answer: 250

4. Сколько есть целых положительных $n \leq 1000$, для которых десятичная запись числа $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ оканчивается на 5?

How many positive integers $n \leq 1000$ make decimal notation of the number $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ end with 5?

Answer: 750

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Рассмотрим последние цифры каждого слагаемого при $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

n	1	2	3	4	5
1^n	1	1	1	1	1
2^n	2	4	8	6	2
3^n	3	9	7	1	3
4^n	4	6	4	6	4
5^n	5	5	5	5	5

Значит, последняя цифра суммы $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ повторяется с периодом 4. Очевидно, что в каждой четверке подряд идущих целых положительных n найдется ровно одно, для которого упомянутая сумма оканчивается на 9 – значит, среди чисел $1, 2, 3, \dots, 2025$ таких чисел будет ровно 506 (4, 8, 12, $\dots$, 2024).

Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

Lets consider the last digits of each term for $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

n	1	2	3	4	5
1^n	1	1	1	1	1
2^n	2	4	8	6	2
3^n	3	9	7	1	3
4^n	4	6	4	6	4
5^n	5	5	5	5	5

Then the last digit of the sum $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ is repeated with a period of 4. Obviously, in each four consecutive positive integers n there is exactly one for which the sum ends with 9 – by that, among the numbers $1, 2, 3, \dots, 2025$ there will be exactly 506 such numbers (4, 8, 12, $\dots$, 2024).

Task 5. Дана бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \dots$, все члены которой – целые положительные числа, причем $a_1 = 1$. Верно ли, что для любого целого положительного n можно выбрать n элементов из множества $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, составляющих геометрическую прогрессию? Обоснуйте свой ответ.

Given an infinite arithmetic progression $a_1, a_2, a_3, \dots$, all members of which are positive integers, also $a_1 = 1$. Is it true for any positive integer n that from the set $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ one can select n elements that form a geometric progression? Explain your answer.

Answer: Да, верно / Yes, it is true

Решение (RUS). Пусть разность исходной арифметической прогрессии равна $d = a_2 - a_1 \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$(d+1)^k = 1 + d \cdot \left(k + \frac{k(k-1)}{2} \cdot d + \dots + d^{k-1}\right),$$

т.е. для всякого целого положительного k в этой арифметической прогрессии встретится число $(d+1)^k$ под номером $\left(k + \frac{k(k-1)}{2} \cdot d + \dots + d^{k-1}\right)$. Ясно, что числа $1, (d+1), (d+1)^2, (d+1)^3, \dots, (d+1)^k, \dots$ составляют геометрическую прогрессию, причем k не ограничено.

Критерии оценивания:

- утверждение доказано для некоторых разностей арифметической прогрессии – 1 первичный балл;
- приведен верный ответ, но доказательство содержит существенный «пробел» – 2 первичных балла;
- доказано существование геометрической прогрессии ограниченной «длины» – 3 первичных балла;
- приведено почти верное доказательство, содержащее незначительные ошибки – 4 первичных балла;
- приведено полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Solution (ENG). Let the difference of the original arithmetic progression be $d = a_2 - a_1 \in \mathbb{Z}$. Then

$$(d+1)^k = 1 + d \cdot \left(k + \frac{k(k-1)}{2} \cdot d + \dots + d^{k-1}\right),$$

i.e. for every positive integer k in this arithmetic progression there will be a member $(d+1)^k$ with its sequential number $\left(k + \frac{k(k-1)}{2} \cdot d + \dots + d^{k-1}\right)$. It is clear that the numbers $1, (d+1), (d+1)^2, (d+1)^3, \dots, (d+1)^k, \dots$ form a geometric progression, and k is not bounded.

Criteria:

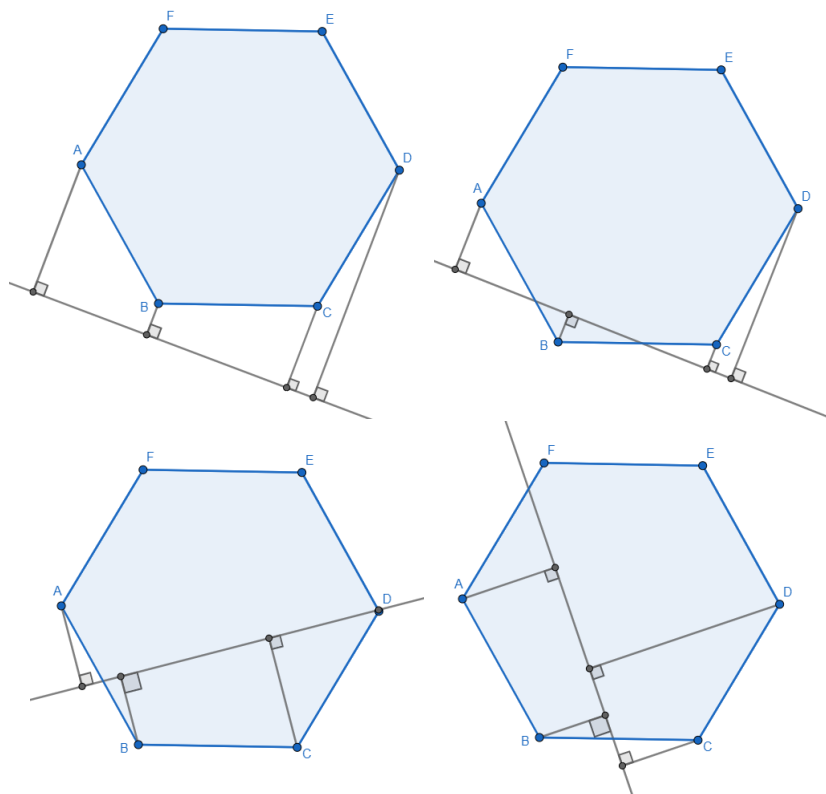
- the statement is proven for some differences of arithmetic progression – 1 pre-point;
- the correct answer is given, but the proof contains significant «gap» – 2 pre-points;
- the existence of a geometric progression of limited «length» is proven – 3 pre-points;
- an almost correct proof is given, but with minor errors – 4 pre-points;
- a completely correct and explained solution is given – 5 pre-points.

Task 6. Правильный шестиугольник $ABCDEF$ (вершины названы последовательно в алфавитном порядке) расположен так, что расстояния от точек A, B, C до прямой l , расположенной в одной плоскости с ними, равны 4, 1, 3 соответственно. Найдите расстояние от точки D до прямой l . Обоснуйте свой ответ.

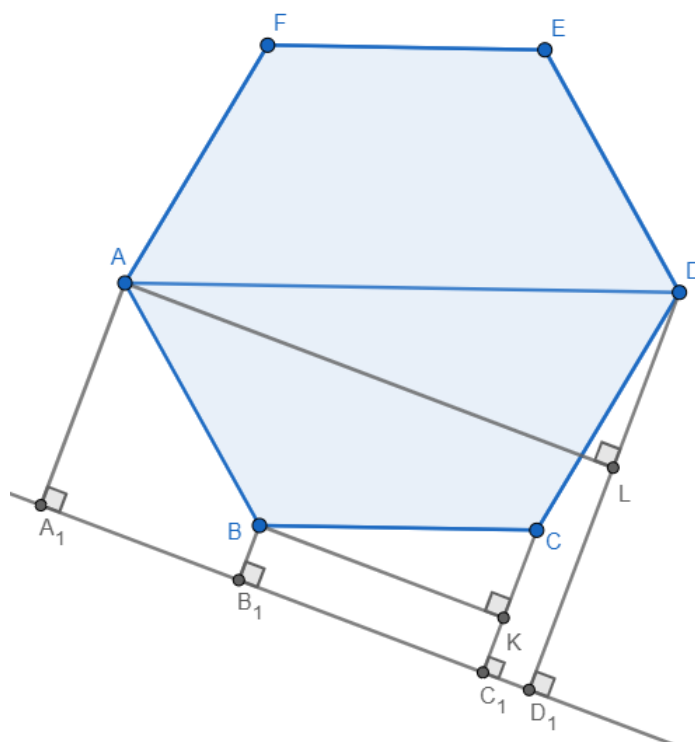
The regular hexagon $ABCDEF$ (the vertices are named sequentially in alphabetical order) is located in such way that the distances from the points A, B, C to the line l (which lies in the same plane as the points do) are 4, 1, 3 respectively. Find the distance from the point D to the line l . Explain your answer.

Answer: 0, 4, 8, 12

Решение (RUS). Существуют 4 принципиально разных взаимных расположения точек A, B, C, D и прямой l :



Рассмотрим первое из них (остальные рассматриваются аналогично) и введем обозначения, как показано на рисунке:



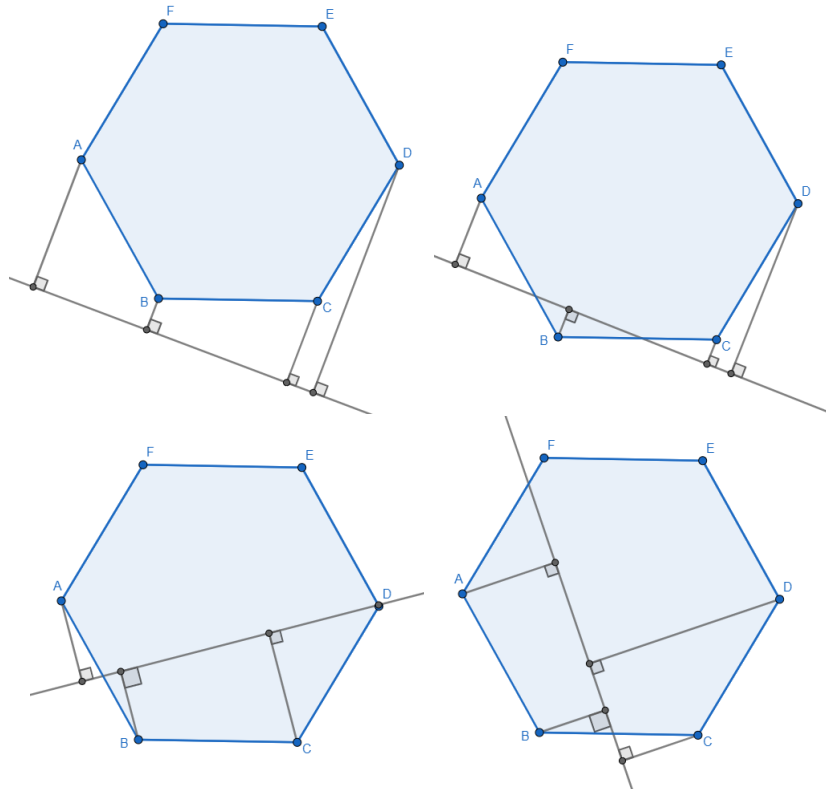
Отметим, что $AD \parallel BC$, $AD = 2 \cdot BC$, отсюда $\triangle BCK \sim \triangle ADL$ и $DL = 2 \cdot CK = 2(CC_1 - BB_1) = 4$, откуда $DD_1 = DL + LD_1 = DL + AA_1 = 8$.

Критерии оценивания:

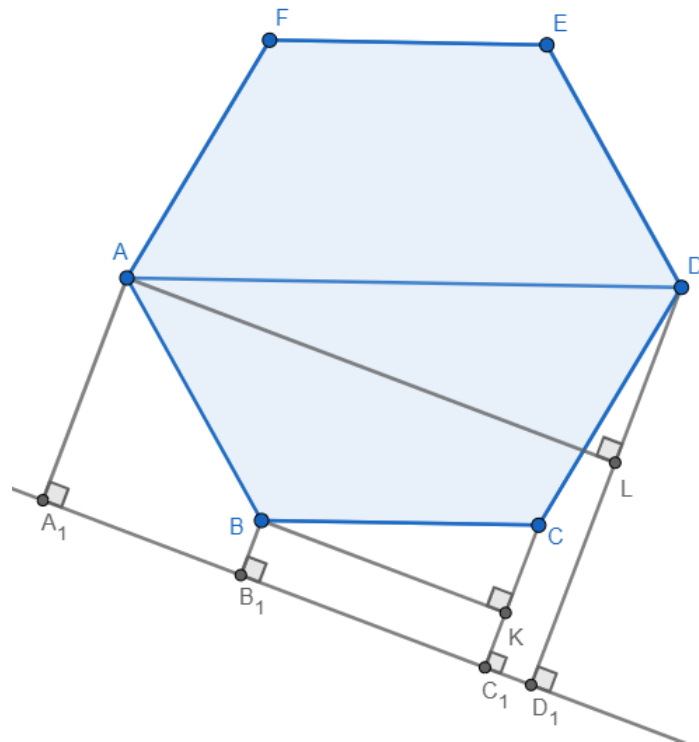
- в доказательстве есть значительные «пробелы», нет достаточного обоснования – 0 первичных баллов;

- доказательство почти верно, но рассмотрены не все случаи взаимного расположения шестиугольника и прямой l и допущена незначительная ошибка в рассуждениях или вычислениях – 2 первичных балла;
- доказательство верно, но рассмотрены не все случаи взаимного расположения шестиугольника и прямой l – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Solution (ENG). There are 4 fundamentally different mutual arrangements of points A, B, C, D and line l :



Lets consider the first of them (the rest are considered similarly) and introduce the notations as shown in the picture:



Note that $AD \parallel BC$, $AD = 2 \cdot BC$, thus $\triangle BCK \sim \triangle ADL$ and $DL = 2 \cdot CK = 2(CC_1 - BB_1) = 4$, and by that $DD_1 = DL + LD_1 = DL + AA_1 = 8$.

Criteria:

- the proof contains significant «gaps» and lacks explanation – 0 pre-points;
- the proof is almost correct, but not all cases of mutual arrangement of the hexagon and line l are considered and a minor error in reasoning or calculations is made – 2 pre-points;
- the proof is correct, but not all cases of mutual arrangement of the hexagon and line l are considered – 4 pre-points;
- a completely correct and explained solution – 5 pre-points.