

10th degree

Task 1. В однокруговом (каждые две команды играют друг с другом по одному разу) турнире по футболу участвовали $n \geq 2$ команд. За победу в матче команда получает 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков. После окончания турнира оказалось, что команда, набравшая больше всех очков, выиграла меньше матчей, чем любая другая. При каком наименьшем n это возможно?

Answer: 8

Решение (RUS). Пусть турнир выиграла команда A . Всего было сыграно $n(n-1)/2$ игр, в каждой из которых разыграно не менее 2 очков – значит, суммарно команды набрали не менее $n(n-1)$ очков, т.е. среднее число очков – не менее $(n-1)$. Очевидно, команда A набрала более чем $(n-1)$ очков (иначе все команды набрали бы поровну, и одного победителя не было бы) – значит, команда A выиграла не менее 1 игры. Следовательно, каждая из оставшихся команд должна выиграть не менее 2 раз и набрать тем самым не менее 6 очков – значит, команда A сыграла вничью не менее 4 раз. Выберем произвольную команду, сыгравшую с командой A вничью – она набрала не менее 7 очков, т.е. команда A набрала не менее 8 очков – значит, A сыграла вничью не менее 5 раз (при одной победе), и $n \geq 7$.

Предположим, что $n = 7$, тогда команда A выиграла 1 раз и сыграла вничью 5 раз, т.е. набрала 8 очков. Тогда любая другая команда выиграла два раза, и не более 1 раза сыграла вничью – значит, у каждой такой команды есть не менее 3 поражений; тогда всего на турнире было не менее $3 \cdot 6 = 18$ поражений и при этом $1 + 2 \cdot 6 = 13$ побед, что невозможно. Значит, $n \geq 8$.

Приведем пример для $n = 8$: пусть в турнире участвовали команды $A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$, и победила команда A . Тогда команда A выиграла у команд A_1, A_2 , и сыграла вничью с остальными командами, набрав 11 очков. Каждая из остальных команд A_i выиграла у $A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}$ (при этом считаем $A_8 \equiv A_1, A_9 \equiv A_2, A_{10} \equiv A_3$) и проиграла остальным. Таким образом, команды A_1, A_2 имеют по 3 победы и 4 поражения (значит, по 9 очков), а команды A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 – по 3 победы, 3 поражения и 1 ничьей с командой A (значит, у этих команд – по 10 очков).

Критерии оценивания:

- приведена и обоснована оценка на $(n-1)$ очков – 1 первичный балл;
- приведена и обоснована оценка $n \geq 7$ – 2 первичных балла;
- доказано, что $n \neq 7$ – 3 первичных балла;
- верное решение при незначительных недочетах – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 2. По определению, $\{x\} = x - [x]$, где $[x]$ – это целая часть числа x , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x . Про число a известно, что $\left\{\frac{1}{a+3}\right\} = \{a^2\}$, а также что $3 < a^2 < 4$.

Чему может быть равно $a^6 - \frac{96}{a+3}$?

Answer: 13

Решение (RUS). Из условия следует $[a^2] = 3$. Также $a > 1$, откуда $a + 3 > 4 > 1$ – значит, $0 < \frac{1}{a+3} < 1$, откуда, очевидно, $\left\{ \frac{1}{a+3} \right\} = \frac{1}{a+3}$. Выражение в условии можно переписать как

$$\frac{1}{a+3} = a^2 - 3,$$

откуда $a^3 + 3a^2 - 3a - 10 = 0$, причем $a^3 + 3a^2 - 3a - 10 = (a+2)(a^2 + a - 5) = 0$, среди корней которого, помимо $a = -2$, имеем $a = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$ – из них под условие подходит только $a = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$.

Из условий и доказанного вытекает, что для данного a выполняются условия:

$$\frac{1}{a+3} = a^2 - 3; \quad a^2 = 5 - a$$

Тогда $\frac{1}{a+3} = 5 - a - 3 = 2 - a$, и далее

$$a^2 = 5 - a;$$

$$a^3 = 5a - a^2 = 5a - (5 - a) = 6a - 5;$$

$$a^4 = 6a^2 - 5a = 6(5 - a) - 5a = 30 - 11a;$$

$$a^5 = 30a - 11a^2 = 30a - 11(5 - a) = 41a - 55;$$

$$a^6 = 41a^2 - 55a = 41(5 - a) - 55a = 205 - 96a.$$

Подставляя последнее в условие, имеем:

$$a^6 - \frac{96}{a+3} = (205 - 96a) - 96(2 - a) = 205 - 192 = 13.$$

Критерии оценивания:

- верно выражены $\left\{ \frac{1}{a+3} \right\}$ и $[a^2] - 1$ первичный балл;
- верно выражены $\left\{ \frac{1}{a+3} \right\}$, $[a^2]$ и $a - 2$ первичных балла;
- верное и обоснованное решение при арифметической ошибке – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 3. Для отличных от 0 чисел x, y, z выполнено $xy + yz + zx = 0$. Докажите, что нельзя составить треугольник с длинами сторон

$$\frac{1}{|x^2 + 2yz|}, \quad \frac{1}{|y^2 + 2zx|}, \quad \frac{1}{|z^2 + 2xy|}$$

Решение (RUS).

$$\frac{1}{x^2 + 2yz} = \frac{1}{x^2 + 2yz - (xy + yz + zx)} = \frac{1}{x^2 - xy - xz + yz} = \frac{1}{(x - y)(x - z)},$$

аналогично

$$\frac{1}{y^2 + 2zx} = \frac{1}{(y - x)(y - z)}, \quad \frac{1}{z^2 + 2xy} = \frac{1}{(z - x)(z - y)}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + 2yz} + \frac{1}{y^2 + 2zx} + \frac{1}{z^2 + 2xy} &= \frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-x)(y-z)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)} = \\ &= \frac{-(y-z) - (z-x) - (x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 0, \end{aligned}$$

поэтому среди чисел $\frac{1}{|x^2+2yz|}$, $\frac{1}{|y^2+2zx|}$, $\frac{1}{|z^2+2xy|}$ одно равно сумме двух других, что противоречит неравенству треугольника – значит, составить треугольник с такими длинами сторон не получится.

Критерии оценивания:

- существенные продвижения на пути к выводу, что сумма двух дробей равна третьей – 1 первичный балл;
- верное и обоснованное решение при незначительной ошибке – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 4. Султан поймал $2n + 1$ мудрецов (n – натуральное число), выстроил их в ряд и повернул каждого мудреца так, что тот смотрит либо на север, либо на юг. Далее султан по очереди называет числа $1, 2, 3, \dots, (2n + 1)$: когда названо «1», один из мудрецов должен развернуться на 180° ; по команде «2» уже двое мудрецов должны развернуться на 180° , и т.д., и по команде « $2n + 1$ » все мудрецы должны развернуться на 180° . Мудрецы могут заранее договориться о стратегии и во время выполнения команд координировать свои действия.

Докажите, что, выполняя команды султана, мудрецы могут в конце концов (т.е. после команды « $2n + 1$ ») развернуться в одну сторону (либо все – на север, либо все – на юг). Может ли быть так, что мудрецы могут сами выбрать эту сторону?

Answer: Нет, не может

Решение (RUS). Докажем требуемое индукцией по n . База индукции ($n = 1$, трое мудрецов): возможны два случая:

- если все мудрецы изначально смотрят в одну сторону, то по команде «1» разворачивается один из них, по команде «2» – остальные двое, а по команде «3» – все трое;
- если (без ограничения общности) первый мудрец смотрит на юг, а двое других – на север, то по команде «1» разворачивается второй мудрец, по команде «2» – первый и второй, а по команде «3» – все трое.

Индукционная гипотеза: пусть утверждение верно для $2(n - 1) + 1 = 2n - 1$ мудрецов.

Индукционный шаг: докажем утверждение для $2n + 1$ мудрецов. Возможны два случая:

- есть двое мудрецов, повернутых в противоположные стороны. Тогда будем рассматривать остальных $2n - 1$ мудрецов: после команд $1, 2, \dots, (2n - 1)$ они все развернутся в одну сторону (без ограничения общности, на север); тогда по команде « $2n$ » все мудрецы, повернутые на север, разворачиваются на юг (в результате все $2n + 1$ мудрецов будут повернуты на юг), а по команде « $2n + 1$ » все мудрецы развернутся на север;

- все мудрецы повернуты в одну сторону (без ограничения общности, на север). Мысленно выстроим мудрецов по кругу и пронумеруем $1, 2, \dots, (2n+1)$ по часовой стрелке. Тогда по команде «1» разворачивается мудрец 1, по команде «2» – мудрецы 2 и 3, по команде «3» – мудрецы 4, 5, 6, и т.д. Тогда всего выполнено $1+2+\dots+(2n+1) = (n+1)(2n+1)$ разворотов, причем каждый мудрец развернулся ровно по $(n+1)$ разу, т.е. в конце концов мудрецы снова смотрят в одну сторону.

Индукция завершена.

Теперь докажем, что мудрецы не могут заранее выбрать направление, в котором будут смотреть после всех команд султана. Предположим противное: пусть существует начальная расстановка, из которой мудрецы заранее могут выбрать описанное направление, т.е. существует последовательность S_1 разворотов, в результате которой все мудрецы будут смотреть на север, и последовательность S_2 разворотов, в результате которой все мудрецы будут смотреть на юг. Представим себе, что все мудрецы смотрят на юг. Тогда, выполняя последовательность S_2 в обратном порядке, а затем – S_1 в прямом порядке, мы развернем всех мудрецов на север. Заметим, что общее число мудрецов нечетно, и каждый из них развернулся нечетное число раз – значит, общее число разворотов должно быть нечетным. С другой стороны, количество разворотов равно $2 \cdot (1+2+\dots+2n+1)$ – четное число. Получили противоречие, что доказывает требуемое.

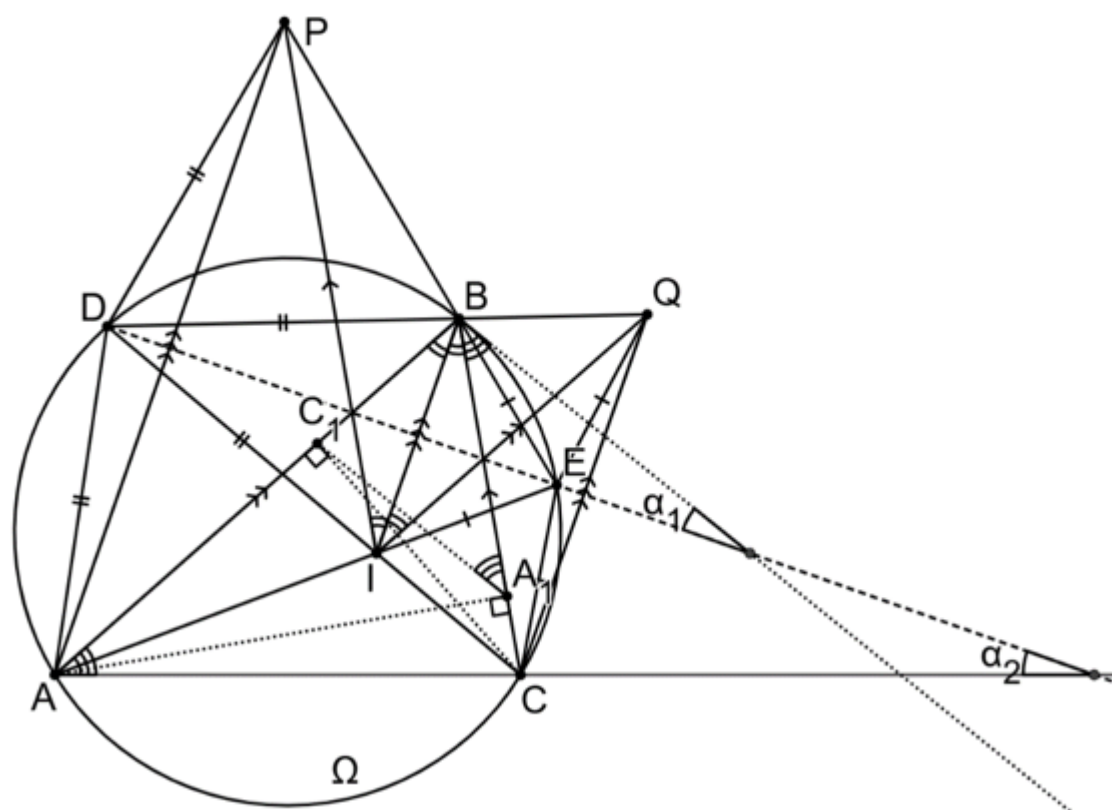
Критерии оценивания:

- есть значительные продвижения в доказательстве и/или ответе на вопрос задачи – 2 первичных балла;
- есть верное доказательство или обоснованный ответ на вопрос задачи – 3 первичных балла;
- верное и обоснованное решение с незначительным недочетом – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 5. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC . Через вершину A провели прямую, параллельную биссектрисе угла B этого треугольника, и отметили на ней такую точку P , что $PI \parallel BC$. Аналогично, через вершину C провели прямую, параллельную биссектрисе угла B этого треугольника, и отметили на ней такую точку Q , что $QI \parallel BA$. Точки D и E – центры описанных окружностей треугольников ABP и CBQ , соответственно. Пусть точки A_1 и C_1 – основания высот треугольника ABC , проведенных из вершин A и C , соответственно. Докажите, что прямая DE образует равные углы с прямыми A_1C_1 и AC .

Решение (RUS). Поскольку BI – биссектриса треугольника ABC , $\angle IBC = \angle ABI$, а также $\angle BIP = \angle IBC$ как накрест лежащие при параллельных прямых PI и BC . Отсюда $\angle BIP = \angle ABI$, что совместно с условием $AP \parallel BI$ означает, что $AIBP$ – равнобокая трапеция или прямоугольник. Значит, это вписанный четырехугольник, то есть точка D равноудалена не только от A, B и P , но и от I . Точка с таким свойством единственна, и при этом середина дуги AB окружности Ω , описанной вокруг треугольника ABC , действительно равноудалена от точек A, I и B (по лемме о трезубце). Значит, точка D и является серединой этой дуги, и, аналогично, – точка E является серединой дуги BC окружности Ω . Теперь заметим, что прямая A_1C_1 параллельна касательной к Ω в точке B . Действительно, четырехугольник AC_1A_1C – вписанный (поскольку

$\angle AC_1C = \angle AA_1C = 90^\circ$), откуда $\angle BA_1C_1 = \angle CAB$. Но угол между касательной к Ω в точке B и прямой BC равен половине градусной меры дуги BC , то есть вписанному углу $\angle BAC$, опирающемуся на ту же дугу. Из равенства накрест лежащих углов при прямой BC следует параллельность касательной и прямой A_1C_1 . Это означает, что для доказательства требуемого утверждения достаточно проверить, что прямая DE образует равные углы с касательной к Ω в точке B и прямой AC . Этот факт сразу следует из теоремы об угле между секущими (в предельном случае – между касательной и секущей): такой угол равен полуразности градусных мер дуг, заключённых внутри угла, и того факта, что D и E – середины дуг AB и BC окружности Ω .



Критерии оценивания:

- приведены корректный чертеж и плодотворная идея – 1 первичный балл;
- доказана вписанность четырехугольников $BIAP, BICQ$ – 2 первичных балла;
- доказано, что D, E – середины соответствующих дуг – 3 первичных балла;
- доказана параллельность A_1C_1 касательной к окружности и/или задача сведена к равенству углов между DE и касательной, DE и AC – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.