

11 degree

Task 1. В апреле каждого года на острове Паити из 30 дней ровно 10 дней – дождливые. На этом острове вот уже N лет живет абориген, у которого голова болит только в двух случаях:

- если сегодня идет дождь, хотя вчера дождя не было,
- если сегодня нет дождя, хотя вчера шел дождь,

и никогда не болит 1 апреля. Известно, что за всю жизнь этого аборигена набор дождливых апрельских дней ни разу не повторился. Найдите среднее число апрельских дней, когда у этого аборигена болела голова, если N принимает наибольшее возможное значение.

Answer: 40/3

Решение (RUS). Пусть каждый дождливый апрельский день очередного года абориген отмечает числом из набора $\{1, 2, \dots, 10\}$ (без повторений), а каждый солнечный день – числом из набора $\{11, 12, \dots, 30\}$ (также без повторений). Тогда каждый апрель абориген получает уникальную перестановку чисел из набора $\{1, 2, \dots, 30\}$, причем общее число возможных перестановок равно $30!$.

Количество упомянутых перестановок, соответствующих распределению апрельских дней, когда k -го апреля ($k = 2, 3, \dots, 30$) у аборигена болит голова, равно $10 \cdot 20 \cdot (28! + 28!)$, тогда среднее количество дней, когда у аборигена болит голова, равно

$$\frac{29 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 28!}{30!} = \frac{40}{3}$$

Критерии оценивания:

- верно применена формула для числа перестановок для дождливых/ясных дней – 1 первичный балл;;
- при подсчете числа перестановок для дождливых/ясных дней учтены дни, когда у аборигена болит голова, но допущены ошибки – 3 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 2. Найдите количество натуральных $k > 1$, для которых в системе счисления с основанием 2026 верно следующее: натуральное число кратно k тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр кратна k .

Answer: 14

Решение (RUS). Далее нижним индексом записи числа будем обозначать систему счисления, в которой выполнена эта запись, используя при этом по умолчанию десятичную систему счисления.

Сначала докажем, что искомые k не превосходят 2025_{10} , обозначая за $S(n)$ сумму цифр числа n в 2026-ичной системе счисления; очевидно, $S(n) \leq n$, причем равенство достигается только для $n < 10_{2026} = 2026_{10}$ – для таких n утверждение очевидно. Если $n \geq 10_{2026}$, то $n = \overline{a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0} = a_p 2026^p + a_{p-1} 2026^{p-1} + \dots + a_1 \cdot 2026 + a_0$ и $S(n) = a_p + a_{p-1} + \dots + a_1 + a_0$, $a_p \neq 0$. Очевидно, каждое слагаемое указанного представления n не меньше соответствующего слагаемого в $S(n)$, причем $a_p \cdot 2026^p \geq a_p$ т.е. $S(n) < n$ для $p > 0$. Если n кратно k , то $S(n)$ кратно k , $S(S(n))$ кратно k и т.д., пока очередная $S(\dots S(n) \dots)$ не станет меньше 2026_{10} . В указанной последовательности не более n членов, при этом $k \leq S(\dots S(n) \dots) < 2026_{10}$ для последнего члена этой последовательности,

откуда $k \leq 2025_{10}$, что и требовалось доказать.

Теперь докажем, что k – делитель 2025_{10} . Рассмотрим число $\overline{1(k-1)_{2026}}$: согласно признаку делимости, оно кратно k , тогда $\overline{1(k-1)_{2026}} - k = 1 \cdot 2026 + (k-1) - k = 2026 - 1 = 2025$ также кратно k , что и требовалось доказать.

Теперь докажем, что указанный признак делимости работает для всех k , являющихся делителями 2025. Сначала отметим, что $a_i \cdot 2026^i \equiv a_i \cdot 1^i \equiv a_i \pmod{2025}$, откуда

$$\begin{aligned} n &= \overline{a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0} = a_p 2026^p + a_{p-1} 2026^{p-1} + \dots + a_1 \cdot 2026 + a_0 \equiv \\ &\equiv a_p + a_{p-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{2025} = S(n), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Осталось найти количество подходящих k . Число $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ имеет $(4+1)(2+1) = 15$ натуральных делителей, включая 1 – значит, требуемое количество подходящих k равно 14.

Критерии оценивания:

- доказано, что подходят некоторые делители числа 2025 – 1 первичный балл;
- доказано, что $k \leq 2025$ – 2 первичных балла;
- доказано, что k – любой делитель 2025 – 3 первичных балла;
- верное и обоснованное решение с незначительной ошибкой – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 3. В окрестностях Хогвартса живут фантастические твари весом в $1, 2, \dots, n$ килограмм (n – натуральное число). Ньют Саламандер может делать следующее:

1. класть себе в чемодан тварь весом в 1 килограмм, если сейчас в чемодане нет такой твари;
2. выпускать из чемодана тварь весом n килограмм;
3. при $k < n$ выпускать из чемодана тварь весом k килограмм и одновременно впускать туда тварь весом $k+1$ килограмм, если в чемодане нет такой твари.

Известно, что изначально чемодан Ньюта пуст. При каких n Ньют может добиться того, чтобы в чемодане ровно по одному разу побывал бы любой набор тварей из окрестностей Хогвартса, и в итоге в чемодане осталась бы только тварь весом n килограмм?

Answer: $n = 2^m - 1, m \in \mathbb{N}$

Решение (RUS). Заметим, что если Ньюту удастся добиться требуемого, то еще одним действием он сможет снова опустошить свой чемодан.

Выполняя действия 1 и 3, Ньют увеличивает суммарный вес всех тварей в чемодане на 1, а выполняя действие 2, уменьшает его на n . Пусть действие 2 повторилось N_2 раз в цепочке из N действий Ньюта, которая начинается и заканчивается одним и тем же (возможно, пустым) набором фантастических тварей. Тогда $(N - N_2) - N_2 \cdot n = 0$, т.е. $N = N_2 \cdot (n+1)$, т.е. N кратно $n+1$. Поскольку $N = 2^n$, делаем вывод, что 2^n кратно $(n+1)$, откуда $n = 2^m - 1$ для некоторого натурального m .

Приведем пример последовательности действий Ньюта для получения любого набора фантастических тварей (элементы указанных множеств соответствуют весу тварей):

$$\begin{aligned} \emptyset &\rightarrow \{1\} \rightarrow \{2\} \rightarrow \{1, 2\} \rightarrow \{1, 3\} \rightarrow \{2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow \{n-2, n-1\} \rightarrow \{n-2, n\} \rightarrow \{n-2\} \rightarrow \{n-1\} \rightarrow \{n\} \end{aligned}$$

Критерии оценивания:

- рассмотрена последовательность, начинающаяся и заканчивающаяся одинаковыми наборами фантастических тварей – 2 первичных балла;
- доказано, что общее количество действий Ньюта кратно $(n+1) - 3$ первичных балла;
- верное и обоснованное решение с незначительной ошибкой – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 4. В тетраэдре $ABCD$ известно, что $AD = BC$ и $AC = BD$. Сфера с центром в точке пересечения медиан тетраэдра пересекает его ребро BD в таких точках X и Y , что $BX = DY$. Докажите, что $AB = CD$.

Медиана тетраэдра – это отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани.

Решение (RUS). Отметим середины ребер AB и CD – точки M и N , соответственно. Поскольку треугольники DAC и CBD равны (по трём сторонам: $AD = BC$, $AC = BD$, CD – общая), равны их соответственные элементы, в частности, медианы AN и BN . Значит, треугольник ANB равнобедренный, и его медиана NM , проведенная к основанию, является также и высотой, то есть $NM \perp AB$. Аналогичными рассуждениями про треугольники ADB и BCA получаем, что $NM \perp CD$.

Заметим, что середина отрезка MN является также и точкой пересечения медиан G тетраэдра $ABCD$, то есть центром сферы из условия задачи. Этот классический факт проще всего обосновать векторным методом: пусть O – произвольная точка пространства, тогда

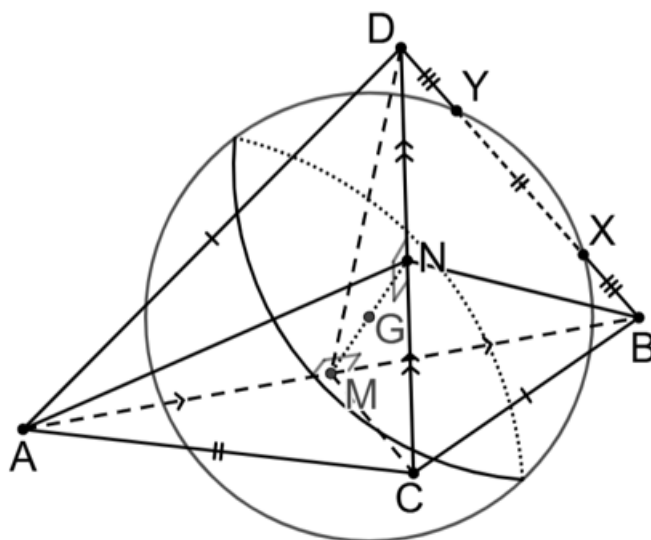
$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4} = \frac{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})/2 + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})/2}{2} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}}{2}$$

(то же рассуждение можно оформить с помощью метода масс)

Запишем степени точек B и D относительно упомянутой сферы: $BX \cdot BY = BG^2 - R^2$ и $DY \cdot DX = DG^2 - R^2$, где R – радиус сферы. Так как $BX = DY$, то также $BY = DX$, то есть степени точек B и D относительно сферы равны, значит, равны расстояния от них до её центра: $BG = DG$. Осталось записать теорему Пифагора:

$$BM^2 - MG^2 = BG^2 = DG^2 = DN^2 - NG^2$$

С учётом условия $MG = NG$ (G – середина отрезка MN) имеем $AB/2 = BM = DN = CD/2$, то есть $AB = CD$, что и требовалось доказать.



Критерии оценивания:

- верное и обоснованное решение с незначительной ошибкой – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 5. Докажите неравенство для положительных a, b :

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq \frac{a + b}{\sqrt{ab + 1}}$$

Решение (RUS). Пусть $\lambda = \frac{a}{a+b}$, $\mu = \frac{b}{a+b}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Тогда исходное неравенство перепишется в виде

$$\lambda \cdot f(b^2 + 1) + \mu \cdot f(a^2 + 1) \geq f(ab + 1)$$

где $\lambda + \mu = 1$. Заметим, что $ab + 1 = \lambda \cdot (b^2 + 1) + \mu \cdot (a^2 + 1)$, поэтому последнее неравенство равносильно

$$\lambda \cdot f(b^2 + 1) + \mu \cdot f(a^2 + 1) \geq f(\lambda \cdot (b^2 + 1) + \mu \cdot (a^2 + 1)),$$

которое верно в силу неравенства Йенсена.

Критерии оценивания:

- приведена плодотворная идея, при этом использовано неравенство о средних (или неравенство Коши-Буняковского-Шварца) – 2 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.