

7th degree

Task 1. Дана прямоугольная таблица из двух строк и четырех столбцов. Петя и Вася по очереди, начиная с Пети, ставят в пустые клетки этой таблицы различные рациональные числа. Когда вся таблица заполнена числами, в каждой строке закрашивается клетка, содержащая наибольшее число в этой строке. Петя выигрывает, если две закрашенные клетки граничат по стороне или по углу. Может ли Вася помешать Пете выиграть?

Answer: Да, может

Решение (RUS). Разобьем клетки в строках на пары следующим образом:

1	2	3	4
3	4	1	2

Если своим ходом Петя ставит рациональное число q в какую-то из отмеченных клеток, скажем, в клетку 1 первой строки, то Вася ставит в клетку 1 второй строки число, которое, во-первых, больше, чем q , а во-вторых, меньше, чем любое другое число, большее q , уже стоящее в этой строке. В таком случае максимальные числа в строках будут стоять на клетках одного номера и не будут иметь ни общей стороны, ни общего угла.

Критерии оценивания:

- приведен верный ответ при неверном обосновании – 1 первичный балл;
- приведен верный ответ и приведена стратегия Васи, но с существенными недочетами – 2 первичных балла;
- приведен верный ответ и приведена стратегия Васи, но с незначительным недочетом и/или не использована рациональность чисел в таблице – 3 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 2. Назовём натуральное число *пифагоровым*, если сумма квадратов его цифр равна точному квадрату. Например, число 34 – пифагорово, т.к. $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$. Найдите максимальное трёхзначное пифагорово число.

Answer: 962

Решение (RUS). Покажем, что число 962 является пифагоровым: действительно, $9^2 + 6^2 + 2^2 = 121 = 11^2$. Покажем, что оно максимально среди трёхзначных пифагоровых. Пусть это не так, тогда обозначим цифры большего пифагорова числа как a, b, c , где само число равно $n = 100a + 10b + c > 962$, тогда $a = 9$, $b \geq 6$.

Назовём *пифагоровостью* числа сумму квадратов его цифр. Тогда пифагоровость числа n не превосходит $9^2 + 9^2 + 9^2 = 243 < 256 = 16^2$ и при этом больше $9^2 + 6^2 = 117$. То есть, т.к. число n пифагорово, его пифагоровость – точный квадрат, не меньший $11^2 = 121$ не превосходящий $15^2 = 225$.

Запишем для n : $9^2 + b^2 + c^2 = p^2$, где p^2 – его пифагоровость, а p – натуральное число. Тогда, рассматривая остатки от деления этих чисел на 4, имеем, что если бы p было чётным, то $1 + b^2 + c^2$ давало бы остаток 0, то есть $b^2 + c^2$ давало бы остаток 3 при делении на 4. Но этого не может быть, так как квадрат целого числа даёт остаток 1 или 0 при делении на 4. Таким образом, p нечётно.

Для p остались варианты 11, 13 и 15. При этом $81 + 49 = 130 > 121$, поэтому в n при пифагоровости 11^2 не может быть второй цифрой что-то большее 6. Но тогда третья цифра совпадает с 2 и мы получили всё то же число 962. Таким образом, для n , если оно больше 962, пифагоровость должна равняться 13^2 или 15^2 .

Оставшиеся варианты несложно перебрать, вычислив выражение для $c^2 = p^2 - a^2 - b^2$. Для пифагоровости 13^2 :

- $13^2 - 9^2 - 6^2 = 169 - 81 - 36 = 88 - 36 = 52$
- $13^2 - 9^2 - 7^2 = 88 - 49 = 39$
- $13^2 - 9^2 - 8^2 = 88 - 64 = 24$
- $13^2 - 9^2 - 9^2 = 7$

Ни один из вариантов не даёт значения точного квадрата для c^2 . Значит, $p = 13$ не подходит. Аналогично, для пифагоровости 15^2 :

- $15^2 - 9^2 - 6^2 = 225 - 81 - 36 = 108$
- $15^2 - 9^2 - 7^2 = 144 - 49 = 95$
- $15^2 - 9^2 - 8^2 = 144 - 64 = 80$
- $15^2 - 9^2 - 9^2 = 144 - 81 = 63$

Также точных квадратов не оказалось. Получаем противоречие с предположением, что n – трёхзначное пифагорово число, большее 962.

Критерии оценивания:

- верно найдено пифагорово число, доказана его «пифагоровость», но не доказано, что оно наибольшее – 1 первичный балл;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 3. Муха-Цокотуха, как известно, обычно не носит носки и ботинки. Но однажды она, собираясь на прогулку по полю, решила надеть по одному носку и одному ботинку на каждую из своих шести ног. Сколькими способами Муха-Цокотуха может выбрать порядок, в котором будет их надевать, если известно, что она не наденет ботинок на ногу, на которой нет носка?

Answer: $12!/2^6 = 7484400$

Решение (RUS). Пронумеруем ноги Мухи-Цокотухи числами от 1 до 6, и пусть $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ – носки, а $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ – ботинки, надетые на соответствующие ноги. Тогда каждому порядку, в котором она будет их надевать, соответствует последовательность вида $x_1, \dots, y_6$ из 12 элементов, где каждый носок x_k предшествует соответствующему ботинку y_k для $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Всего существует $12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 12$ способов переставить между собой члены этой последовательности, причем ровно в половине из них (т.е. в $12!/2$ перестановках) a_1 предшествует b_1 , ровно в половине из них (т.е. в $12!/2^2$ перестановках) a_2 предшествует b_2 , и т.д. – итого получаем $12!/2^6 = 7484400$ подходящих последовательностей.

Критерии оценивания:

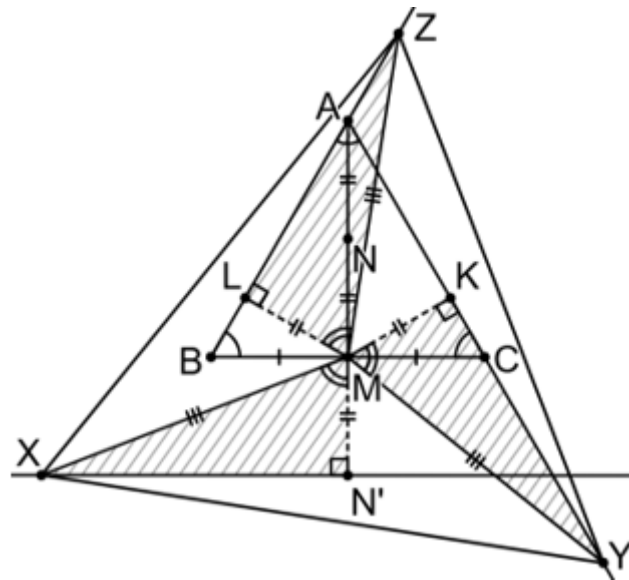
- не учтено, что носки и сапоги одинаковы, но приведена идея с их расстановкой – 1 первичный балл;
- подсчитаны количества перестановок носков (и/или сапог) между собой – 2 первичных балла;
- решение неверно, но учтено, что носки и сапоги не обязательно чередуются – 3 первичных балла;
- допущена арифметическая ошибка при полностью верных рассуждениях – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 4. Дан равносторонний треугольник ABC ; точка M – середина стороны BC , точка N – середина отрезка AM . Через точку, симметричную N относительно BC , провели прямую, параллельную BC , и на этой прямой отметили точку X так, что $CX > BX$. На продолжении стороны AC за точку C отметили точку Y , а на продолжении стороны BA за точку A отметили точку Z , причем $MX = MY = MZ$. Докажите, что треугольник XYZ – равносторонний.

Решение (RUS). Пусть N' – точка, симметричная N относительно BC . Поскольку AM – медиана равностороннего треугольника, она также является его биссектрисой и высотой, т.е. $\angle BAM = \angle CAM = \angle BAC/2 = 60^\circ/2 = 30^\circ$ и $AM \perp BC$. Значит, N' лежит на продолжении медианы AM за точку M , при этом $MN' = MN = AM/2$. Т.к. прямая $N'X$ параллельна BC , то она перпендикулярна AM , а значит, $MN' \perp N'X$.

Опустим перпендикуляры MK и ML из точки M на прямые AC и BA , соответственно. Заметим, что треугольник MAK – прямоугольный с острым углом $\angle MAK = \angle CAM = 30^\circ$. По свойству прямоугольного треугольника с углом 30° , напротив этого угла лежит сторона, равная половине гипотенузы, то есть $MK = AM/2 = MN'$, аналогично для ML . Итак, в прямоугольных треугольниках $MN'X, MKY, MLZ$ равны, по доказанному, катеты ($MN' = MK = ML$), а также, по условию, равны гипотенузы ($MX = MY = MZ$) – значит, эти прямоугольные треугольники равны. Тогда равны их соответственные элементы: $\angle XMN' = \angle YMK = \angle ZML$. Отсюда $\angle XMY = \angle XMN' + \angle N'MY = \angle YMK + \angle N'MY = \angle N'MK = \angle MAK + \angle MKA = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$. Аналогично, $\angle YMZ = \angle KML = 2 \cdot \angle KMA = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ и $\angle ZMX = \angle LMN' = 120^\circ$. Таким образом, равные отрезки MX, MY, MZ , имеющие общий конец, образуют друг с другом углы по 120° – это означает, что треугольники XMY, YMZ, ZMX равны (по двум сторонам и углу между ними), а потому равны и их соответственные элементы. В частности, равны их стороны XY, YZ, ZX , т.е. треугольник XYZ – равносторонний, что и требовалось доказать.

Комментарий. Фактически, три выделенных на чертеже равных прямоугольных треугольника совмещаются друг с другом поворотами на 120° вокруг точки M .



Критерии оценивания:

- найдены и построены перпендикуляры MK, ML на AC, BA – 2 первичных балла;
- доказано равенство треугольников MXN', MKY, MLZ – 3 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 5. За круглым столом сидят 96 человек. Найдите количество натуральных чисел $n < 48$, для каждого из которых эти люди могут пересесть так, чтобы между любыми бывшими соседями теперь сидели ровно n человек.

Answer: 15

Решение (RUS). Пронумеруем людей целыми числами от 0 до 95 в том порядке, в котором они сидят за столом, и попробуем пересадить их так, чтобы бывшие соседи сидели бы через n человек друг от друга. Будем считать, что 0-й сидит там же, где и раньше (иначе можно всех людей циклически сдвинуть на нужное число позиций), тогда 1-й сидит на месте $(n+1)$, 2-й – на месте $2(n+1)$, и т.д., 95-й – на месте $95(n+1)$, причем если номер места больше 95, то берется его остаток при делении на 96. Чтобы все люди могли сесть за стол в новом порядке, все их новые номера (т.е. их остатки при делении на 96) должны различаться.

Пусть $(n+1)$ и 96 имеют общий делитель $d > 1$. Рассмотрим человека с номером $96/d$: он окажется на месте $96(n+1)/d$, что дает остаток 0 при делении на 96, поскольку $n+1$ кратно d – значит, люди с номерами 0 и $96/d$ окажутся на одном и том же месте, что невозможно.

Наоборот, если числа $(n+1)$ и 96 взаимно просты, то все числа вида $k(n+1)$ (для $k = 0, 1, 2, \dots, 95$) дают различные остатки при делении на 96, поэтому при таких n все новые места будут различаться.

Итак, каждому подходящему натуральному $n < 48$ соответствует $n+1 \leq 48$, взаимно простое с $96 = 2^5 \cdot 3$ – значит, натуральные числа, не взаимно простые с 96, кратны либо 2, либо 3. Чисел $n+1 \leq 48$, кратных 2, ровно $48/2 = 24$, а кратных 3 – ровно $48/3 = 16$ штук, при этом $48/6 = 8$ чисел кратны и 2, и 3. Итого различных натуральных чисел $n+1 \leq 48$, кратных либо 2, либо 3, – ровно $24 + 16 - 8 = 32$ штуки; таким образом, чисел $n+1 > 1$, взаимно простых с 96 и не превосходящих 48, будет ровно $48 - 32 - 1 = 15$ штук.

Критерии оценивания:

- неверное решение при наличии идеи нумеровать людей за столом по часовой стрелке или против – 1 первичный балл;
- приведена, но не обоснована идея взаимной простоты $(N + 1)$ и 96 – 2 первичных балла;
- решение частично верно; доказано, что $(N + 1)$ и 96 взаимно просты – 3 первичных балла;
- решение полностью верно, но ответ неверен – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.