

8th degree

Task 1. 12 ребят встали в ряд, причем известно, что есть ровно 2 девочки, справа от которых стоит мальчик; ровно 3 мальчика, справа от которых стоит девочка; ровно 2 мальчика, справа от которых стоит мальчик; ровно 4 девочки, справа от которых стоит девочка.

Сколькими способами можно выстроить этих ребят так, чтобы выполнялись все описанные условия?

Answer: $3^6 \cdot 5! \cdot 7! = 440899200$

Решение (RUS). Весь ряд может быть разбит на последовательности стоящих подряд ребят одного пола. Поскольку есть ровно 2 девочки, справа от которых стоит мальчик, и ровно 3 мальчика, справа от которых стоит девочка, имеем следующую последовательность:

BGBGBG

(здесь «*B*» – ряд из одного или нескольких мальчиков, «*G*» – ряд из одной или нескольких девочек). Отметим, что ровно пятеро из всех ребят – мальчики, а значит, остальные семь – девочки.

В каждом ряду мальчиков есть хотя бы один их представитель, а значит, остальные 2 мальчика могут занять любые места в этих трех рядах – у них для этого есть $3^2 = 9$ способов; кроме того, возможны перестановки мальчиков между собой – всего $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ перестановок. Итого есть $3^2 \cdot 5! = 9 \cdot 120 = 1080$ способов расставить 5 мальчиков на нужные места. Аналогично, найдем количество способов расставить по своим местам 7 девочек: $3^4 \cdot 7! = 408240$ способов.

Итак, есть $1080 \cdot 408240 = 440899200$ способов расставить мальчиков и девочек.

Критерии оценивания:

- показано, что из двенадцати ребят пятеро – мальчики – 2 первичных балла;
- верное и обоснованное решение с ошибкой в подсчете перестановок – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 2. В туристическом лагере 11 отрядов, причем любые два отряда содержат различное количество участников, а самый многочисленный из отрядов называется «Дикобразы». Кроме того, в ходе тренировок обнаружилось, что, в случае необходимости, любой из отрядов можно расформировать, а его участников перераспределить по другим отрядам так, что количество участников во всех оставшихся отрядах станет одинаковым. Каково минимальное возможное количество участников в отряде «Дикобразы»?

Answer: 55

Решение (RUS). Обозначим количества участников разных отрядов за $k_1 < k_2 < \dots < k_{11}$, где k_{11} – это количество участников в «Дикобразах». Исходя из условия, общее количество участников S делится на 10, так как возможно его перераспределение на 10 одинаковых частей. Кроме того, при расформировании наименьшей группы получается, что k_1 участника, как минимум, потребуется заполнить количества, дополняющие группу с k_2 до k_{11} (или более), k_3 до k_{11} , ..., каждой из групп k_i (i от 2 до 10) до k_{11} . Значит, имеем соотношение: $k_1 \geq (k_{11} - k_2) + (k_{11} - k_3) + \dots + (k_{11} - k_{10})$, или, эквивалентно:

$$k_1 + k_2 + \dots + k_{10} \geq 9k_{11}$$

$$(k_{10} - 9) + (k_{10} - 8) + \dots + (k_{10} - 1) + k_{10} \geq k_1 + k_2 + \dots + k_9 + k_{10} \geq 9k_{11} \geq 9(k_{10} + 1),$$

Далее $10k_{10} - (9 + 8 + \dots + 1) \geq 9(k_{10} + 1) \Leftrightarrow k_{10} \geq \frac{9 \cdot 10}{2} + 9 = 54$, т.е. $k_{10} \geq 54$.

Убедимся, что набор чисел $45, 46, \dots, 54, 55$ действительно подходит. Во-первых, в наборе 11 чисел. Во-вторых, если расформирована наименьшая группа, то 45 надо распределить между количествами $55 - 46, 55 - 47, \dots, 55 - 54$, то есть между количествами $9, 8, \dots, 1$ – сумма этих чисел и есть 45. Если расформирована группа с номером i (но не 11-я), то количество $44 + i$ надо распределить между количествами $55 - 45, \dots, 55 - (43 + i), 55 - (45 + i), \dots, 55 - 54$, т.е. $10, \dots, 12 - i, 10 - i, \dots, 1$, т.е. все числа от 10 до 1 кроме $11 - i$. Эта сумма равна $55 - 11 + i = 44 + i$, что в точности совпадает с освободившимся количеством.

Если же расформирована крупнейшая группа, то освободилось 55 человек, которых можно распределить в группы, начиная с минимальной, так: $10, 9, \dots, 1$, что, очевидно, использует всех и даст равные количества участников в группах.

Таким образом, $k_{11} \geq k_{10} + 1 \geq 54 + 1 = 55$, и приведен пример на 55. Значит, 55 – минимально возможное количество участников в группе «Дикобразы».

Критерии оценивания:

- верное и обоснованное решение с незначительной ошибкой – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 3. Дан правильный треугольник со стороной 99. На каждой из его сторон отмечены по 100 точек (включая вершины треугольника), делящих эти стороны на 99 равных частей. Через эти точки параллельно сторонам треугольника проведены прямые, разбивающие его на маленькие треугольнички со стороной 1. В каждой вершине маленького треугольничка лежит монетка. За один ход разрешается выбрать любой треугольничек со стороной 1 и перевернуть все монетки в его вершинах. Изначально все монетки лежали орлом вверх. Можно ли добиться того, чтобы все монетки лежали бы решкой вверх?

Answer: Нет, нельзя / No, it is not possible.

Решение (RUS). Всего монеток ровно $100 \cdot 101/2$, и изначально каждая из них лежит орлом вверх. Покрасим верхние стороны этих монеток в три цвета так, чтобы соседние монетки были бы разноцветными (т.е. у каждой монетки покрашена будет только сторона, лежащая орлом вверх). Заметим, что количество монеток каждого цвета отличается друг от друга не более чем на 1, а общее количество монет не делится на 3. Это означает, что есть такой цвет A , что количество монеток этого цвета нечетно, и есть такой цвет B , что количество монеток этого цвета четно. Каждая операция меняет четность количества монеток каждого цвета, поэтому, чтобы перевернуть все монетки цвета A , нам потребуется нечетное количество операций, а чтобы перевернуть все монетки цвета B – четное количество операций. Значит, невозможно перевернуть монетки цветов A и B , и тем более невозможно перевернуть все монетки вообще.

Критерии оценивания:

- приведена идея раскраски вершин в три цвета и/или использования четности – 2 первичных балла;
- верное и обоснованное решение с незначительной ошибкой – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

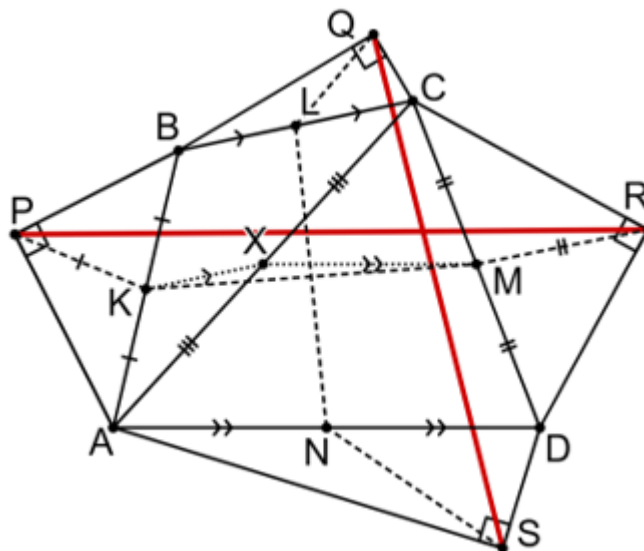
Task 4. На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ как на гипотенузах построили прямоугольные треугольники APB, BQC, CRD и DSA . Оказалось, что $PR \perp QS$, а также $PR = QS = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$. Определите все четырёхугольники $ABCD$, для которых такое возможно.

Answer: все прямоугольники / all rectangles.

Решение (RUS). Пусть точки K, L, M, N – середины сторон AB, BC, CD, DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$, соответственно. Заметим, что в любом четырёхугольнике длина средней линии, то есть отрезка, соединяющего середины двух противоположных сторон, не превосходит полусуммы длин двух других сторон, причём равенство достигается в том и только в том случае, когда эти две другие стороны параллельны. Действительно, отметим середину X диагонали AC . Тогда в треугольниках ABC и ADC отрезки KX и XM , соответственно, – средние линии, т.е. $KX = BC/2$, $XM = AD/2$, а также $KX \parallel BC$ и $XM \parallel AD$. По обобщённому неравенству треугольника имеем $KM \leq KX + XM = (BC + AD)/2$, причём равенство достигается в том и только в том случае, когда точка X лежит на отрезке KM . Так как $KX \parallel BC$ и $XM \parallel AD$, это выполнено тогда и только тогда, когда $BC \parallel AD$, что и требовалось.

Вернёмся к исходной задаче. По теореме о медиане прямоугольного треугольника, $PK = AB/2$ и $RM = CD/2$. Используя неравенство ломаной и доказанный ранее факт, получим $PR \leq PK + KM + MR = AB/2 + KM + CD/2 \leq (AB + CD)/2 + (BC + AD)/2 = (AB + BC + CD + DA)/2$, причём равенство достигается в том и только в том случае, когда, во-первых, точки P, K, M, R лежат на одной прямой именно в таком порядке (чтобы в равенство превратилось первое неравенство), и, во-вторых, $BC \parallel AD$ (чтобы в равенство превратилось второе неравенство). Таким образом, условие, что отрезок PR равен полупериметру четырёхугольника $ABCD$, равносильно тому, что в этом четырёхугольнике стороны BC и AD параллельны (то есть он – либо трапеция, либо параллелограмм), а точки P и R однозначно определяются продолжением средней линии KM на длину $AB/2$ за точку K и на длину $CD/2$ за точку M соответственно, что, в частности, означает также параллельность отрезка PQ сторонам BC и AD . Те же рассуждения про отрезок QS приводят к тому, что стороны AB и CD параллельны, и отрезок QS параллелен им.

Таким образом, четырёхугольник $ABCD$ должен быть параллелограммом. Наконец, тот факт, что отрезки PQ и RS перпендикулярны, означает теперь, что перпендикулярны стороны AB и BC , то есть четырёхугольник $ABCD$ является прямоугольником. Осталось заметить, что для прямоугольника и описанных выше положений точек P, Q, R, S (они окажутся вершинами построенных на сторонах прямоугольника как на гипотенузах во внешнюю сторону равнобедренных прямоугольных треугольников) требуемое условие, очевидно, выполнено.



Критерии оценивания:

- доказана попарная параллельность противоположных сторон четырехугольника – 3 первичных балла;
- верное и обоснованное решение с незначительной ошибкой – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 5. Среди всех $n > 3$ учеников 8-го класса был проведен шахматный турнир, причем каждый одержал победу как минимум в одной партии, и любые двое участников турнира сыграли друг с другом не более одного раза.

Найдите все возможные значения n , если известно, что для любой пары учеников A, B , в которой A не выиграл у B , найдется такой ученик C , что A выиграл у C , а C выиграл у B .

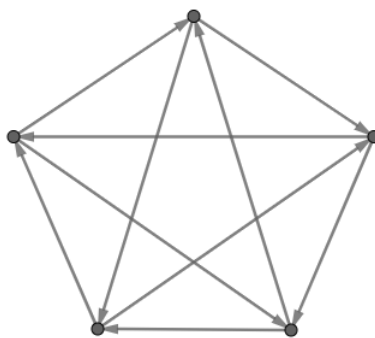
Answer: $n \geq 5$

Решение (RUS). Построим ориентированный граф, вершины которого – ученики класса, а направленные ребра обозначают победы в партиях между ними. Тогда условие задачи равносильно существованию такого ориентированного графа на $n > 3$ вершинах без кратных ребер, что путь из любой вершины до любой другой проходит не более чем по двум ребрам (такой путь будем называть «нужным»). Очевидно, если в графе проведены не все возможные ребра, то всегда можно провести «недостающие», выбрав их направления произвольным образом, и требования условия задачи не будут нарушены.

Сначала убедимся в том, что для $n = 4$ искомого графа не существует; пусть вершины графа – A, B, C, D . Есть два случая:

- из любой вершины можно дойти в любую другую, пройдя по одному ребру: это невозможно, т.к. есть $4 \cdot 3 = 12$ упорядоченных пар вершин, в то время как ребер – не более 6;
- из любой вершины можно дойти в любую другую, пройдя по одному или двум ребрам: пусть есть ребра $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow C$. Тогда возможны два случая:
 - существует ребро $A \rightarrow C$: тогда, чтобы существовал нужный путь из C в A , необходимы ребра $C \rightarrow D$ и $D \rightarrow A$; чтобы существовал нужный путь из B в A , необходимо ребро $B \rightarrow D$, но тогда нет нужного пути из C в B ;
 - существует ребро $C \rightarrow A$: тогда, чтобы существовал нужный путь из D в A , необходимо провести либо $D \rightarrow C$, либо $D \rightarrow A$, либо $A \rightarrow D$. В первом случае необходимо провести $B \rightarrow D$, и тогда, чтобы существовал путь из D в B , необходимо $D \rightarrow A$, но тогда не существует нужного пути из C в D ; второй случай сводится к первому, а в третьем случае, рассматриваемом аналогично, не находится нужного пути либо из B в D , либо наоборот.

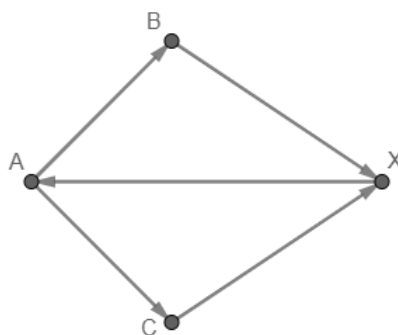
Докажем по индукции, что для $n \geq 5$ искомый граф существует. База индукции ($n = 5$): см. рисунок ниже.



Индукционная гипотеза: пусть существует искомый граф Γ на $n \geq 5$ вершинах.

Шаг индукции: покажем, как построить требуемый граф на $(n + 1)$ вершине – добавим к имеющемуся графу Γ новую вершину X . Рассмотрим два случая:

- если n четно, то разобьем все вершины графа Γ на упорядоченные пары (A_i, B_i) с ребром $A_i \rightarrow B_i$ ($i = 1, 2, \dots, n/2$). Тогда проведем новые ребра так: $B_i \rightarrow X$ и $X \rightarrow A_i$ (образовав для всех i циклы длины 3). Выберем две произвольные вершины полученного графа – если ни одна из них не совпадает с X , то воспользуемся индукционной гипотезой; если только одна из них (назовем ее C) не совпадает с X , то она входит в одну из описанных пар (A_i, B_i) , которые вместе с X образуют цикл длины 3, т.е. из любой из них существует нужный путь в любую другую;
- если n нечетно, то выберем произвольную вершину A графа Γ – она соединена ребрами со всеми остальными его вершинами, причем либо входящих в нее, либо выходящих (либо тех и других) ребер не менее 2. Если существуют два выходящих из A ребра (в B и C), то разобьем остальные вершины Γ на пары, как описано в предыдущем случае. Для новой вершины X , помимо циклов длины 3 с парами, как описано в предыдущем случае, проведем ребра $X \rightarrow A$, $B \rightarrow X$, $C \rightarrow X$. Легко убедиться в том, что полученный граф удовлетворяет требованиям задачи, а случай с двумя входящими в A ребрами рассматривается аналогично.



Индукция завершена, и вместе с ней – решение задачи.

Критерии оценивания:

- доказано, что $n \neq 4$, приведен пример для $n = 5$ – 2 первичных балла;
- верное и обоснованное решение с незначительной ошибкой – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.