

9th degree

Task 1. Пусть $S(m)$ – сумма всех цифр десятичной записи натурального числа m . Существует ли натуральное n , для которого $S(n^{2026}) = S(n) + 2026$?

Answer: Нет, не существует

Решение (RUS). Отметим, что любое натуральное n дает тот же остаток при делении на 3, что и сумма цифр его десятичной записи. Пусть k – остаток при делении n на 3, тогда $n \equiv S(n) \equiv k \pmod{3}$, и $n^{2026} \equiv S(n^{2026}) \equiv k^{2026} \pmod{3}$, причем из уравнения следует $k^{2026} \equiv k + 2026 \pmod{3}$, что невозможно (убеждаемся в этом перебором $k = 0, 1, 2$, где $2^{2026} \equiv (-1)^{2026} \equiv 1 \pmod{3}$) – значит, уравнение не имеет корней.

Критерии оценивания:

- приведена идея использовать остаток от деления на 3 и/или 9 – 1 первичный балл;
- верное и обоснованное решение с незначительной ошибкой – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 2. Аня и Боря играют в игру: Боря называет натуральное число $n \geq 2$, а Аня красит каждое целое число от 1 до n в один из трех цветов. Аня выиграет, если сможет покрасить числа так, что разность любых двух одноцветных чисел не равна точному квадрату. Сможет ли Аня выиграть, если Боря назовет

а) $n = 16$;

б) $n = 29$?

Answer: а) да; б) нет / а) yes; b) no.

Решение (RUS). а) Аня выиграет, если раскрасит числа так (через A, B, C обозначены цвета):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	B	A	B	C	A	B	A	B	C	A	B	C	A	B	C

б) Докажем, что Аня проиграет. Заметим, что в наборах $(1, 10, 26)$ и $(1, 17, 26)$ совпадают два числа из трех, а любая разность двух чисел является точным квадратом, поскольку совпадает с числом из пифагоровой тройки 9, 16, 25. Значит, числа 10 и 17 одноцветны – пусть она имеют цвет A . Аналогично доказывается, что числа 11 и 18 одноцветны; поскольку $11 = 10 + 1^2$, оба числа 11 и 18 имеют другой цвет – назовем его B . Далее, по аналогичным соображениям, числа 12 и 19 одноцветны, но поскольку $12 = 11 + 1^2$ и $19 = 10 + 3^2$, их цвет отличается от A и B – назовем его C .

Наконец, рассмотрим также одноцветную пару чисел 13 и 20. Заметим, что $13 = 12 + 1^2$, поэтому они не могут быть покрашены в цвет C ; $17 = 13 + 2^2$, поэтому они не могут быть покрашены в цвет A ; $20 = 11 + 3^2$, поэтому они не могут быть покрашены в цвет B . Таким образом, искомой раскраски не существует.

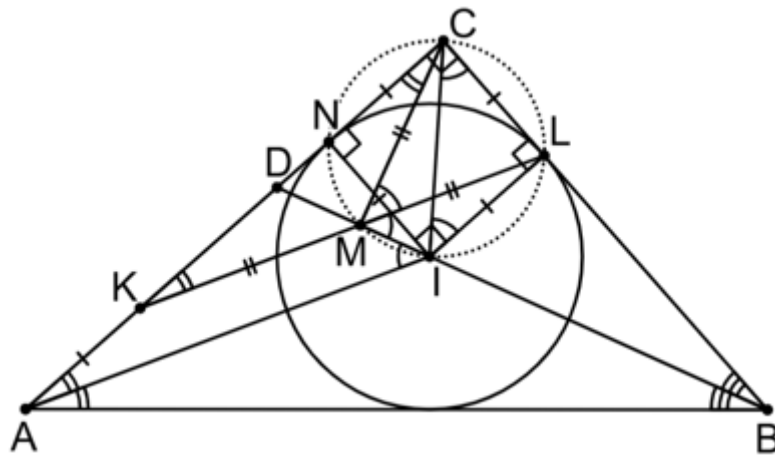
Критерии оценивания:

- приведен верный пример для п.а): +1 первичный балл;
- доказательство в п.б) содержит незначительные недочеты: +3 первичных балла;
- приведено верное доказательство в п.б): +4 первичных балла.

Task 3. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC отметили такие точки K и L , что $AK = CL = r$, где r – радиус вписанной окружности треугольника ABC . Оказалось, что середина отрезка KL лежит на биссектрисе угла $\angle ABC$. Найдите углы треугольника ABC .

Answer: $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$

Решение (RUS). Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC , M – середина отрезка KL . Как известно, в прямоугольном треугольнике вершина прямого угла, центр вписанной окружности и точки касания вписанной окружности с катетами образуют квадрат (это следует из перпендикулярности радиусов к касательным в точках касания и равенства отрезков касательных, проведенных из одной точки). Значит, L – это точка касания вписанной окружности треугольника ABC с его катетом AB . Заметим, что $AK \perp BC$ и $IL \perp BC$, откуда следует, что $AK \parallel IL$. Таким образом, в четырёхугольнике $AKLI$ противоположные стороны равны ($AK = IL = r$) и параллельны – следовательно, это параллелограмм. Отсюда получаем равенство накрест лежащих углов $\angle LMI = \angle MIA$. Но $\angle MIA = \angle IAB + \angle IBA = (\angle CAB + \angle CBA)/2 = (180^\circ - \angle ACB)/2 = (180^\circ - 90^\circ)/2 = 45^\circ$. Заметим также, что CI – биссектриса угла C , т.е. $\angle ICL = (\angle ACB)/2 = (90^\circ)/2 = 45^\circ$. Отсюда $\angle LMI = \angle MIA = 45^\circ = \angle ICL$, а значит, точки I, M, C, L лежат на одной окружности. В частности, это означает, что $\angle CML = \angle CIL$. Заметим, что в прямоугольном треугольнике CKL отрезок CM – медиана, проведённая к гипотенузе. Значит, $CM = ML = KM$, т.е. треугольник CKM – равнобедренный, $\angle CKM = \angle KCM$. Но из параллельности AI и KL имеем $\angle CKM = \angle CAI = (\angle CAB)/2$. Значит, $\angle CML = \angle CKM + \angle KCM = 2\angle CKM = \angle CAB$. Поскольку $\angle CIL = 45^\circ$ (как угол между стороной и диагональю квадрата), получаем $\angle CAB = \angle CML = \angle CIL = 45^\circ$. Таким образом, прямоугольный треугольник ABC – равнобедренный, и его углы равны $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. Обратными рассуждениями легко понять, что в таком треугольнике условие задачи выполнено.



Критерии оценивания:

- доказано, что $AILLK$ – параллелограмм, либо другое значительное продвижение – 2 первичных балла;
- верное и обоснованное решение с незначительным недочетом – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 4. Не считая внешней твёрдой обложки, все страницы книги занумерованы так: на первом листе напечатаны страницы 1 и 2, на втором – страницы 3 и 4, и т.д. Из этой книги выпал кусок, в котором содержится ровно половина листов книги, идущих подряд. Коля посчитал сумму оставшихся страниц и получил 2025. Найдите номер первой страницы выпавшего куска.

Answer: 45

Решение (RUS). Обозначим количество листов книги за n ; из условия следует, что n чётно. Отметим, что раз нумерация начинается с листа со страницами 1 и 2, то и далее на каждом листе сначала идёт нечётная (по номеру) страница, а далее на этом листе – чётная страница. Обозначим номер первой из выпавших страниц за $k + 1$ для некоторого целого неотрицательного k – этот номер должен быть нечётным, а значит k – чётное число, причем $k \leq n$.

Количество страниц в книге равно $2n$ (вдвое больше количества листов), и выпали $n/2$ листов, то есть n страниц, номера которых – все натуральные числа от $k + 1$ до $k + n$ включительно. Их сумма равна $\frac{(n+k)(n+k+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2}$. Изначально в полной книге сумма номеров страниц равна $\frac{2n(2n+1)}{2}$. Таким образом, сумма номеров оставшихся страниц равна

$$\frac{2n(2n+1)}{2} - \left(\frac{(n+k)(n+k+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} \right) = \frac{n(3n+1-2k)}{2} = 2025$$

Имеем $n(3n+1-2k) = 2 \cdot 2025 = 2 \cdot 5^2 \cdot 3^4$. Найдём все возможные комбинации n и k для такого равенства. Так как $0 \leq k \leq n$, то $n+1 \leq 3n+1-2k \leq 3n+1$.

Отметим, что $n/2$ и $3n+1-2k$ – это комплементарные делители числа 2025 (то есть их произведение – это само число 2025). Делители $2025 = 5^2 \cdot 3^4$ – это числа вида $3^i \cdot 5^j$ для целых неотрицательных i, j : $i \leq 4, j \leq 2$, а именно

1, 3, 9, 27, 81

5, 15, 45, 135, 405

25, 75, 225, 675, 2025

Они же порядке возрастания:

1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, 135, 225, 405, 675, 2025

Причём, как известно (и легко проверить), делители с номером s с начала этого списка и с порядковым номером s , считая с конца этого списка будут комплементарными. Откуда, домножая первый ряд на 2, легко получить список из 15 «кандидатов» на роль чисел $(n, 3n+1-2k)$, из которых нам подходят только те, в которых чётное число – меньшее из двух:

(2, 2025), (6, 675), (10, 405), (18, 225), (30, 135), (50, 81), (54, 75), ...

Дальнейшие не подходят, так как первое число в паре при таком упорядочивании возрастает, а второе – убывает. Кроме того, второе число должно не превосходить величины $3n+1$, что не работает для (30, 135), а значит и для предыдущих (так как в предыдущих первое число меньше, а второе – больше). Итого, остаются два варианта: (50, 81), (54, 75).

Для первого варианта получаем $n = 50, 3n+1-2k = 81$, откуда $k = 35$, что не подходит по чётности k .

Для второго варианта имеем $n = 54, 3n + 1 - 2k = 75$, откуда $k = 44$, что подходит. Остаётся убедиться, что этот вариант даёт возможную ситуацию: действительно, при таких параметрах получаем, что в книге 54 листа, первые 22 листа с номерами от 1 до 44 остались на месте, а выпавший кусок начинается со страницы 45 и содержит 54 страницы, т.е. 27 листов, что составляет половину от 54. Таким образом, это единственный возможный вариант, и ответ на вопрос задачи – 45.

Критерии оценивания:

- приведена верная формула суммы номеров оставшихся страниц – 2 первичных балла;
- верное и обоснованное решение с незначительной ошибкой – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 5. Для каждого натурального n найдется натуральное m , которое можно представить в виде суммы натуральных чисел $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, где $a_1 \leq 1, a_2 \leq 2, \dots, a_n \leq n$ – назовем такое представление *интересным*. Например, для $n = 3$ можно выбрать $m = 4$, и для такого m существует даже 2 интересных представления: $4 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1$ (при этом $2 + 1 + 1$ не подходит, т.к. тогда $a_1 = 2 > 1$).

Найдите все натуральные n , для каждого из которых существует натуральное m , имеющее не менее $(n - 1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1)$ интересных представлений вида $a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Answer: $n \in \{1, 2, 3, 4\}$

Решение (RUS). Для $n = 1, 2, 3, 4$ можно выбрать $m = 1, 3, 5, 7$, соответственно. Докажем, что для остальных n требуемых m не существует.

Зафиксируем $n > 4$ и предположим, что для него нашлось требуемое m . Заметим, что каждому интересному представлению m вида $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ соответствует упорядоченный набор $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$, поскольку a_n после этого выбирается единственным способом. Таких упорядоченных наборов – не более $(n - 1)!$ штук, поэтому каждый из этих наборов действительно должен быть интересным, т.е. $a_i \leq 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, (n - 1)$, откуда $m \leq 1 + 1 + \dots + 1 + n = 2n - 1$, т.к. $a_n \leq n$. Также $m \geq 1 + 2 + \dots + (n - 1) + 1 = \frac{n(n-1)}{2} + 1$, чтобы существовало интересное представление m с $a_i = i$ для всех $i = 1, 2, \dots, (n - 1)$. Таким образом, имеем

$$2n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} + 1 \iff 2(n-1) \geq \frac{n(n-1)}{2} \iff 4 \geq n,$$

что противоречит предположению.

Критерии оценивания:

- приведено доказательство для $n \leq 4$ – 1 первичный балл;
- значительное продвижение в решении для произвольного n – 3 первичных балла;
- верное и обоснованное решение с незначительной ошибкой – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.