

10^й класс

К каждой задаче требуется развернутое и обоснованное решение.

Задача 1. Пусть $S(m)$ – сумма всех цифр десятичной записи натурального числа m . Существует ли натуральное n , для которого $S(n^{2026}) = S(n) + 2026$?

Задача 2. По определению, $\{x\} = x - [x]$, где $[x]$ – это целая часть числа x , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x . Про число a известно, что $\left\{\frac{1}{a+3}\right\} = \{a^2\}$, а также что $3 < a^2 < 4$. Чему может быть равно $a^6 - \frac{96}{a+3}$?

Задача 3. Для отличных от 0 чисел x, y, z выполнено $xy + yz + zx = 0$. Докажите, что нельзя составить треугольник с длинами сторон

$$\frac{1}{|x^2 + 2yz|}, \frac{1}{|y^2 + 2zx|}, \frac{1}{|z^2 + 2xy|}$$

Задача 4. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC . Через вершину A провели прямую, параллельную биссектрисе угла B этого треугольника, и отметили на ней такую точку P , что $PI \parallel BC$. Аналогично, через вершину C провели прямую, параллельную биссектрисе угла B этого треугольника, и отметили на ней такую точку Q , что $QI \parallel BA$. Точки D и E – центры описанных окружностей треугольников ABP и CBQ , соответственно. Пусть точки A_1 и C_1 – основания высот треугольника ABC , проведенных из вершин A и C , соответственно. Докажите, что прямая DE образует равные углы с прямыми A_1C_1 и AC .

Задача 5. В окрестностях Хогвартса живут фантастические твари весом в $1, 2, \dots, n$ килограмм (n – натуральное число). Ньют Саламандер может делать следующее:

1. класть себе в чемодан тварь весом в 1 килограмм, если сейчас в чемодане нет такой твари;
2. выпускать из чемодана тварь весом n килограмм;
3. при $k < n$ выпускать из чемодана тварь весом k килограмм и одновременно впускать туда тварь весом $k + 1$ килограмм, если в чемодане нет такой твари.

Известно, что изначально чемодан Ньюта пуст. При каких n Ньют может добиться того, чтобы в чемодане ровно по одному разу побывал бы любой набор тварей из окрестностей Хогвартса, и в итоге в чемодане осталась бы только тварь весом n килограмм?