

11^й класс

К каждой задаче требуется развернутое и обоснованное решение.

Задача 1. Найдите количество натуральных $k > 1$, для которых в системе счисления с основанием 2026 верно следующее: натуральное число кратно k тогда и только тогда, когда сумма его цифр кратна k .

Задача 2. В апреле каждого года на острове Паити из 30 дней ровно 10 дней – дождливые. На этом острове вот уже N лет живет абориген, у которого голова болит только в двух случаях:

- если сегодня идет дождь, хотя вчера дождя не было,
- если сегодня нет дождя, хотя вчера шел дождь,

и никогда не болит 1 апреля. Известно, что за всю жизнь этого аборигена набор дождливых апрельских дней ни разу не повторился. Найдите среднее число апрельских дней, когда у этого аборигена болела голова, если N принимает наибольшее возможное значение.

Задача 3. В тетраэдре $ABCD$ известно, что $AD = BC$ и $AC = BD$. Сфера с центром в точке пересечения медиан тетраэдра пересекает его ребро BD в таких точках X и Y , что $BX = DY$. Докажите, что $AB = CD$.

Медиана тетраэдра – это отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани.

Задача 4. Докажите неравенство для положительных a, b :

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq \frac{a + b}{\sqrt{ab + 1}}$$

Задача 5. Султан поймал $2n + 1$ мудрецов (n – натуральное число), выстроил их в ряд и повернул каждого мудреца так, что тот смотрит либо на север, либо на юг. Далее султан по очереди называет числа $1, 2, 3, \dots, (2n + 1)$: когда названо «1», один из мудрецов должен развернуться на 180° ; по команде «2» уже двое мудрецов должны развернуться на 180° , и т.д., и по команде « $2n + 1$ » все мудрецы должны развернуться на 180° . Мудрецы могут заранее договориться о стратегии и во время выполнения команд координировать свои действия.

Докажите, что, выполняя команды султана, мудрецы могут в конце концов (т.е. после команды « $2n + 1$ ») развернуться в одну сторону (либо все – на север, либо все – на юг). Может ли быть так, что мудрецы могут сами выбрать эту сторону?