

8^й класс

К каждой задаче требуется развернутое и обоснованное решение.

Задача 1. 12 ребят встали в ряд, причем известно, что есть ровно 2 девочки, справа от которых стоит мальчик; ровно 3 мальчика, справа от которых стоит девочка; ровно 2 мальчика, справа от которых стоит мальчик; ровно 4 девочки, справа от которых стоит девочка.

Сколькими способами можно выстроить этих ребят так, чтобы выполнялись все описанные условия?

Задача 2. В туристическом лагере 11 отрядов, причем любые два отряда содержат различное количество участников, а самый многочисленный из отрядов называется «Дикобразы». Кроме того, в ходе тренировок обнаружилось, что, в случае необходимости, любой из отрядов можно расформировать, а его участников перераспределить по другим отрядам так, что количество участников во всех оставшихся отрядах станет одинаковым. Каково минимальное возможное количество участников в отряде «Дикобразы»?

Задача 3. Дан правильный треугольник со стороной 99. На каждой из его сторон отмечены по 100 точек (включая вершины треугольника), делящих эти стороны на 99 равных частей. Через эти точки параллельно сторонам треугольника проведены прямые, разбивающие его на маленькие треугольнички со стороной 1. В каждой вершине маленького треугольничка лежит монетка. За один ход разрешается выбрать любой треугольничек со стороной 1 и перевернуть все монетки в его вершинах. Изначально все монетки лежали орлом вверх. Можно ли добиться того, чтобы все монетки лежали бы решкой вверх?

Задача 4. На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ как на гипотенузах построили прямоугольные треугольники APB , BQC , CRD и DSA . Оказалось, что $PR \perp QS$, а также $PR = QS = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$. Определите все четырёхугольники $ABCD$, для которых такое возможно.

Задача 5. Для каждого натурального n найдется натуральное m , которое можно представить в виде суммы натуральных чисел $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, где $a_1 \leq 1$, $a_2 \leq 2$, ..., $a_n \leq n$ – назовем такое представление *интересным*. Например, для $n = 3$ можно выбрать $m = 4$, и для такого m существует даже 2 интересных представления: $4 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1$ (при этом $2 + 1 + 1$ не подходит, т.к. тогда $a_1 = 2 > 1$).

Найдите все натуральные n , для каждого из которых существует натуральное m , имеющее не менее $(n - 1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1)$ интересных представлений вида $a_1 + a_2 + \dots + a_n$.