

9^й класс

К каждой задаче требуется развернутое и обоснованное решение.

Задача 1. В однокруговом (каждые две команды играют друг с другом по одному разу) турнире по футболу участвовали $n \geq 2$ команд. За победу в матче команда получает 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков. После окончания турнира оказалось, что команда, набравшая больше всех очков, выиграла меньше матчей, чем любая другая. При каком наименьшем n это возможно?

Задача 2. Аня и Боря играют в игру: Боря называет натуральное число $n \geq 2$, а Аня красит каждое целое число от 1 до n в один из трех цветов. Аня выиграет, если сможет покрасить числа так, что разность любых двух одноцветных чисел не равна точному квадрату. Сможет ли Аня выиграть, если Боря назовет

а) $n = 16$;

б) $n = 29$?

Задача 3. Не считая внешней твёрдой обложки, все страницы книги занумерованы так: на первом листе напечатаны страницы 1 и 2, на втором – страницы 3 и 4, и т.д. Из этой книги выпал кусок, в котором содержится ровно половина листов книги, идущих подряд. Коля посчитал сумму оставшихся страниц и получил 2025. Найдите номер первой страницы выпавшего куска.

Задача 4. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC отметили такие точки K и L , что $AK = CL = r$, где r – радиус вписанной окружности треугольника ABC . Оказалось, что середина отрезка KL лежит на биссектрисе угла $\angle ABC$. Найдите углы треугольника ABC .

Задача 5. Каждый из $n > 3$ учеников 9-го класса дал списать контрольную по математике как минимум одному другому ученику того же класса, причем никакие двое не давали списать друг другу, т.е. если ученик A дал списать ученику B , то B не давал списывать A .

Найдите все возможные значения n , если известно, что для любой пары учеников A, B , ни один из которых не давал списать другому, найдется такой ученик C , что либо A списал у C , который списал у B , либо наоборот – B списал у C , который списал у A .