

10th degree

Task 1.

1. Смежные стороны прямоугольника равны x см и y см, где x, y – положительные целые числа; периметр прямоугольника равен P см, а площадь – S см². Найдите количество таких прямоугольников, если $S = 12 \cdot P$. Прямоугольники $x \times y$ и $y \times x$, конечно, одинаковые.

Answer: 11

2. Смежные стороны прямоугольника равны x см и y см, где x, y – положительные целые числа; периметр прямоугольника равен P см, а площадь – S см². Найдите количество таких прямоугольников, если $S = 24 \cdot P$. Прямоугольники $x \times y$ и $y \times x$, конечно, одинаковые.

Answer: 14

3. Смежные стороны прямоугольника равны x см и y см, где x, y – положительные целые числа; периметр прямоугольника равен P см, а площадь – S см². Найдите количество таких прямоугольников, если $S = 16 \cdot P$. Прямоугольники $x \times y$ и $y \times x$, конечно, одинаковые.

Answer: 6

4. Смежные стороны прямоугольника равны x см и y см, где x, y – положительные целые числа; периметр прямоугольника равен P см, а площадь – S см². Найдите количество таких прямоугольников, если $S = 36 \cdot P$. Прямоугольники $x \times y$ и $y \times x$, конечно, одинаковые.

Answer: 18

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Из условия имеем $xy = 24(x + y)$, откуда $(x - 24)(y - 24) = 576 = 2^6 \cdot 3^2$ – у последнего числа $(6 + 1)(2 + 1) = 21$ делитель, причем все делители, кроме 24, разбиваются на пары a, b , для которых $a \cdot b = 576$, причем каждая пара порождает равные прямоугольники. Значит, общее число различных прямоугольников равно $(21 + 1)/2 = 11$.

Task 2.

1. Дан набор цифр: 0, 1, 2, 2, 7, 0, 6, 6, 4, 8. Разрешается удалить одну из них, а из остальных составить десятичную запись 9-значного числа, кратного 75. Сколько различных чисел можно получить таким образом? Число не может начинаться с цифры «0».

Answer: 2520

2. Дан набор цифр: 0, 0, 1, 1, 1, 2, 5, 6, 7, 8. Разрешается удалить одну из них, а из остальных составить десятичную запись 9-значного числа, кратного 60. Сколько различных чисел можно получить таким образом? Число не может начинаться с цифры «0».

Answer: 12000

3. Дан набор цифр: 0, 0, 1, 2, 5, 6, 7, 7, 8, 9. Разрешается удалить одну из них, а из остальных составить десятичную запись 9-значного числа, кратного 225. Сколько различных чисел можно получить таким образом? Число не может начинаться с цифры «0».

Answer: 16380

4. Дан набор цифр: 0, 1, 1, 1, 2, 2, 5, 6, 9, 9. Разрешается удалить одну из них, а из остальных составить десятичную запись 9-значного числа, кратного 180. Сколько различных чисел можно получить таким образом? Число не может начинаться с цифры «0».

Answer: 1260

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Чтобы число делилось на 75, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 25. Чтобы полученное число делилось на 25, оно должно оканчиваться на 00, 25, 50 или 75, но цифры 5 в наборе нет, поэтому требуемое число оканчивается на 00, и цифру 0 удалять нельзя. Чтобы число делилось на 3, требуется, чтобы сумма его цифр делилась на 3. Сумма цифр приведенного набора равна $0 + 1 + 2 + 2 + 7 + 0 + 6 + 6 + 4 + 8 = 36$ – значит, чтобы сумма цифр требуемого числа делилась на 3. Итак, можно удалить только цифру 6.

Удалив цифру 6, мы получим число вида $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_700}$, где $a_1, \dots, a_7$ – цифры 1, 2, 2, 7, 6, 4, 8 в некотором порядке, и есть $\frac{7!}{2!} = 2520$ способов переставить их всевозможными способами.

Task 3.

1. Числа 1, 2, 3, ..., 36 выписали по кругу в указанном порядке по часовой стрелке. Каждую секунду разрешается поменять местами два соседних числа. За какое наименьшее количество секунд можно добиться того, что все числа будут расположены в обратном порядке, т.е. 1, 2, 3, ..., 36 против часовой стрелки?

Answer: 306

2. Числа 1, 2, 3, ..., 60 выписали по кругу в указанном порядке по часовой стрелке. Каждую секунду разрешается поменять местами два соседних числа. За какое наименьшее количество секунд можно добиться того, что все числа будут расположены в обратном порядке, т.е. 1, 2, 3, ..., 60 против часовой стрелки?

Answer: 870

3. Числа 1, 2, 3, ..., 24 выписали по кругу в указанном порядке по часовой стрелке. Каждую секунду разрешается поменять местами два соседних числа. За какое наименьшее количество секунд можно добиться того, что все числа будут расположены в обратном порядке, т.е. 1, 2, 3, ..., 24 против часовой стрелки?

Answer: 132

4. Числа 1, 2, 3, ..., 40 выписали по кругу в указанном порядке по часовой стрелке. Каждую секунду разрешается поменять местами два соседних числа. За какое наименьшее количество секунд можно добиться того, что все числа будут расположены в обратном порядке, т.е. 1, 2, 3, ..., 40 против часовой стрелки?

Answer: 380

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Будем считать, что числа расположены в вершинах правильного n -угольника, а требуемое минимальное число перестановок обозначим за $f(n)$. Чтобы поменять местами числа, расположенные друг от друга «на расстоянии» k сторон нашего многоугольника (считаем $k \leq n/2$, иначе будем переставлять вдоль другой дуги окружности, описанной около n -угольника), требуется не менее $\lfloor (k-1)/2 \rfloor$ секунд ($\lfloor t \rfloor$ – целая часть числа t), т.е. $f(n) \geq f(n-1) + \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ – значит,

$$f(2k) \geq 1 + \lfloor 3/2 \rfloor + \lfloor 5/2 \rfloor + \dots + \lfloor (2k-1)/2 \rfloor = 2(1 + 2 + \dots + (k-1)) = k^2 - k$$

$$f(2k+1) \geq f(2k) + \lfloor 2k/2 \rfloor = k^2$$

На то, чтобы поменять порядок следования чисел $1, 2, \dots, k$ на противоположный, будем последовательно переставлять 1 и 2, 1 и 3, ... 1 и k , затем 2 и 3, 2 и 4, ..., 2 и k и т.д. – потребуется $(k-1) + (k+2) + \dots + 1 = (k^2 - k)/2$ секунд. Для того, чтобы переставить остальные $n - k$ чисел, потребуется еще $(n-k)(n-k-1)/2$ секунд – итого $(n^2 - 2n)/4$ секунд для четного n .

Task 4.

1. Найдите наименьшее целое положительное n , при котором $4^{941} - 4^{212}$ не кратно 3^n .

Answer: 8

2. Найдите наименьшее целое положительное n , при котором $4^{456} - 4^{213}$ не кратно 3^n .

Answer: 7

3. Найдите наименьшее целое положительное n , при котором $4^{171} - 4^{90}$ не кратно 3^n .

Answer: 6

4. Найдите наименьшее целое положительное n , при котором $4^{850} - 4^{121}$ не кратно 3^n .

Answer: 8

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Пусть a – наибольшее целое число, для которого $4^{941} - 4^{212} = 4^{212}(4^{729} - 1)$ кратно 3^a , тогда искомое $n = a + 1$. Очевидно, 4^{212} не кратно 3, поэтому $4^{729} - 1 = 4^{3^6} - 1$ кратно 3^a . Докажем по индукции следующее утверждение: наименьшее целое положительное x , для которого $4^x - 1$ кратно 3^{a+1} , равно 3^a .

База индукции ($a = 1$): очевидно, $4^{3^1} - 1 = 63$ кратно $3^2 = 9$, при этом $4^1 - 1 = 3$ и $4^2 - 1 = 15$ не кратны 9.

Индукционная гипотеза: пусть $4^x - 1$ кратно 3^{a+1} при $x = 3^a$, при этом для всех меньших x это не выполнено.

Шаг индукции: требуется доказать, что $4^{3^x} - 1$ кратно 3^{a+2} , но для всех целых чисел, меньших $3x$, это не выполнено.

$$4^{3^x} - 1 = (4^x - 1)(4^{2x} + 4^x + 1)$$

Перый сомножитель кратен 3^{a+1} (но не 3^{a+2}) по предположению индукции. Рассмотрим второй сомножитель: $4^{2x} + 4^x + 1 \equiv 1^2 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod{3^{a+1}}$ по предположению индукции, т.е. $4^{3^x} - 1$

кратно $3 \cdot 3^{a+1} = 3^{a+2}$. Докажем, что для всех целых $b < 3x$ число $4^b - 1$ не кратно 3^{a+2} : пусть $4^b - 1$ кратно 3^{a+2} , тогда $b = 3^a \cdot c + r$ для некоторого целого $r \in [0; 3^a)$ и целого $c \in \{0, 1, 2\}$. Имеем $4^b \equiv 4^r \pmod{3^{a+1}}$, т.е. $r = 0$. Ясно, что случаи $c = 0$ и $c = 1$ противоречат индукционной гипотезе, а для $c = 2$ имеем $4^{2 \cdot 3^a} - 1 = (4^{3^a} - 1)(4^{3^a} + 1)$ – первый множитель не кратен 3^{a+2} , а второй не кратен 3 – противоречие с предположением, что завершает доказательство.

Task 5. По кругу записаны 2^n неотрицательных целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2^n}$. Далее все числа a_i одновременно заменяются на числа $|a_{i+1} - a_i|$, где $a_{2^n+1} = a_1$. Докажите, что в результате этого процесса все числа рано или поздно станут нулями.

Решение (RUS). Заметим, что на каждом шаге максимальное число в наборе не увеличивается, т.е. если в некоторый момент времени максимальное число станет равно 0, то и все остальные числа тоже будут равны 0. Предположим, что максимальное число в нашем наборе в результате операций перестало меняться и стало равно $m > 0$. Для удобства заменим числа m на числа 1, и будем рассматривать все числа как остатки по модулю 2. Тогда, если мы в какой-то момент получим только нулевые остатки, это будет означать, что все числа обратились в нули.

Докажем индукцией по k , что после k -го шага для всех $i = 1, 2, 3, \dots, 2^n$ будет выполнено

$$a_i^{(k)} \equiv \sum_{j=0}^k C_k^j \cdot a_{(i+j)} \pmod{2^n} \pmod{2}$$

База индукции ($k = 1$): $a_i^{(1)} \equiv |a_{i+1} - a_i| \equiv a_i + a_{i+1} \pmod{2}$.

Индукционная гипотеза: пусть утверждение выполнено для $1, 2, \dots, k$.

Шаг индукции:

$$a_i^{(k+1)} \equiv |a_{i+1}^{(k)} - a_i^{(k)}| \equiv a_{i+1}^{(k)} + a_i^{(k)} \equiv$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k C_k^j \cdot a_{(i+j)} \pmod{2^n} + \sum_{j=0}^k C_k^j \cdot a_{(i+j+1)} \pmod{2^n} &\equiv \sum_{j=0}^k C_k^j \cdot a_{(i+j)} \pmod{2^n} + \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} \cdot a_{(i+j)} \pmod{2^n} \equiv \\ &\sum_{j=0}^{k+1} (C_k^j + C_k^{j-1}) \cdot a_{(i+j)} \pmod{2^n} \equiv \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j \cdot a_{(i+j)} \pmod{2^n} \pmod{2} \end{aligned}$$

Мы использовали известное тождество $C_k^j + C_k^{j-1} = C_{k+1}^j$. Индукция завершена.

Для $k = 2^n$ биномиальные коэффициенты C_k^j четны для $j = 1, 2, \dots, k-1$, при этом $C_k^0 = C_k^k = 1$. После 2^n шагов имеем

$$a_i^{(2^n)} \equiv a_i^{(2^n-1)} + a_{(i+2^n)}^{(2^n-1)} \pmod{2^n} \equiv 2 \cdot a_i^{(2^n-1)} \equiv 0 \pmod{2},$$

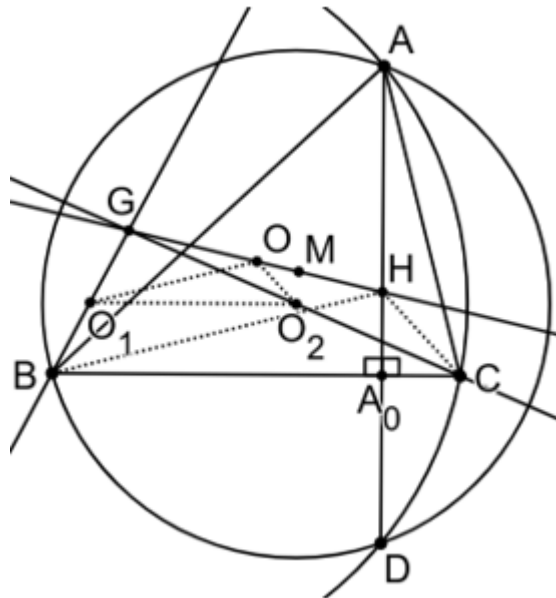
т.е. не более чем через 2^n шагов все исходные числа обратятся в нули, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания:

- отмечено, что максимальное число в последовательности не увеличивается, и что все числа через некоторое число шагов становятся четными, либо другие полезные наблюдения – 1 первичный балл;
- доказано, что все числа через некоторое число шагов становятся четными – 3 первичных балла;
- полное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 6. Пусть O – центр описанной окружности, M – точка пересечения медиан неравнобедренного остроугольного треугольника ABC . На продолжении высоты AA_0 за точку A_0 отметили точку D , после чего отметили центры описанных окружностей треугольников ACD и ABD – точки O_1 и O_2 соответственно. Докажите, что прямые BO_1, CO_2 и OM пересекаются в одной точке или параллельны. rs

Решение (RUS). Заметим, что на так называемой прямой Эйлера треугольника ABC , помимо точек O и M , всегда расположен и ортоцентр треугольника H . Поэтому достаточно проверить требуемое для прямых BO_1, CO_2 и OH . Если O_1 и O_2 совпадают, то с ними совпадает и точка O – требуемое очевидно, поэтому далее считаем, что точки O_1 и O_2 различны; заметим, что они обе лежат на серединном перпендикуляре к AD . Аналогично, O_1 и O лежат на серединном перпендикуляре к AC , а центры O и O_2 – на серединном перпендикуляре к AB . Следовательно, прямые O_1O_2, OO_1, OO_2 параллельны соответственно стороне BC и прямым BH, CH , содержащим высоты треугольника ABC – это означает, что стороны треугольников OO_1O_2 и HBC попарно параллельны. Но тогда, как известно, существует либо гомотетия, переводящая один треугольник в другой, либо параллельный перенос. В первом случае прямые BO_1, CO_2 и OH пересекаются в одной точке, во втором случае – параллельны.



Критерии оценивания:

- приведено верное доказательство для одного из возможных положений точки D – 1 первичный балл;
- рассмотрены случаи, когда D лежит на окружности и совпадает с A_0 , далее не развита или развита с серьёзными недочётами идея с линейным движением D , либо нет доказательства, что с движением D также линейно двигается точка пересечения определенных прямых – 2 первичных балла;
- приведено верное доказательство, кроме случая параллельности упомянутых прямых – 4 первичных балла;
- полностью верное доказательство – 5 первичных баллов.