

10th degree

Task 1.

1. Найдите наименьшее целое t , при котором уравнение $x! + y! + z! = 10t + 43$ имеет хотя бы одно решение (x, y, z) для попарно различных положительных целых x, y, z .

Запись « $n!$ » обозначает факториал натурального n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Answer: 8

2. Найдите наименьшее целое t , при котором уравнение $x! + y! + z! = 10t + 67$ имеет хотя бы одно решение (x, y, z) для попарно различных положительных целых x, y, z .

Запись « $n!$ » обозначает факториал натурального n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Answer: -4

3. Найдите наименьшее целое t , при котором уравнение $x! + y! + z! = 10t - 17$ имеет хотя бы одно решение (x, y, z) для попарно различных положительных целых x, y, z .

Запись « $n!$ » обозначает факториал натурального n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Answer: 14

4. Найдите наименьшее целое t , при котором уравнение $x! + y! + z! = 10t - 33$ имеет хотя бы одно решение (x, y, z) для попарно различных положительных целых x, y, z .

Запись « $n!$ » обозначает факториал натурального n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Answer: 6

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Не ограничивая общности, будем полагать $x > y > z$. Заметим, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ четно при всех $n \geq 2$, в то время как $10t + 43$ нечетно, поэтому среди чисел $x!, y!, z!$ либо одно, либо три являются нечетными. Все три не могут быть нечетными, поскольку тогда $x = y = z = 1$, что противоречит условию, — значит, $z = 1$, откуда $x! + y! = 10t + 42$.

Заметим, что $10t + 42 \equiv 2 \pmod{10}$. Поскольку $n! \equiv 0 \pmod{10}$ для $n \geq 5$, имеем $y < 5$, далее перебором (сначала для $y < x < 5$, затем для $x = 5$, $y \equiv 2 \pmod{10}$), откуда $y = 2$) находим минимальное $x! + y! \equiv 2 \pmod{10}$ — эта сумма равна $5! + 2! = 122$, откуда $t = 8$.

Task 2.

1. Найдите наименьшее возможное число рукопожатий между 30 людьми, если среди любых трех из них найдутся двое, пожавших друг другу руки.

Answer: 210

2. Найдите наименьшее возможное число рукопожатий между 36 людьми, если среди любых трех из них найдутся двое, пожавших друг другу руки.

Answer: 306

3. Найдите наименьшее возможное число рукопожатий между 24 людьми, если среди любых трех из них найдутся двое, пожавших друг другу руки.

Answer: 132

4. Найдите наименьшее возможное число рукопожатий между 40 людьми, если среди любых трех из них найдутся двое, пожавших друг другу руки.

Answer: 380

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Выберем человека (пусть его зовут A), сделавшего наименьшее число (k) рукопожатий. Тогда все остальные 29 человек, кроме A , можно разбить на 2 группы: в первой группе будут k людей, которые пожали руку A (каждый из них сделал не менее k рукопожатий), а во второй – $29 - k$ людей, кому A не пожал руку. Согласно условию, все люди из второй группы должны пожать руки друг другу ($\frac{1}{2}(29 - k)(28 - k)$ рукопожатий), иначе двое не пожавших друг другу руки вместе с A образуют тройку людей без рукопожатий, что исключено условием задачи. Итак, общее число рукопожатий не меньше чем

$$\frac{1}{2}(k + k^2 + (29 - k)(28 - k)) = k^2 - 28k + 406 = (k - 14)^2 + 210 \geq 210$$

Равенство достигается, если разбить все 30 человек на две равные группы, в каждой из которых все пожмут друг другу руки, при этом между группами рукопожатий не будет.

Task 3.

1. Для неотрицательных a, b, c выполнено $ab + bc + ca = 16$ и $a \geq 3$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $2a + b + c$.

Answer: 10

2. Для неотрицательных a, b, c выполнено $ab + bc + ca = 144$ и $a \geq 5$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $2a + b + c$.

Answer: 26

3. Для неотрицательных a, b, c выполнено $ab + bc + ca = 48$ и $a \geq 4$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $2a + b + c$.

Answer: 16

4. Для неотрицательных a, b, c выполнено $ab + bc + ca = 24$ и $a \geq 5$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $2a + b + c$.

Answer: 14

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Пусть $x = b + c$. Тогда по неравенству о средних $bc \leq \frac{1}{4}x^2$. Значит, $16 = ab + bc + ca = ax + bc \leq ax + \frac{1}{4}x^2$, откуда $x^2 + 4ax - 64 \geq 0$. Рассмотрим это неравенство как квадратное относительно x . Множество его решений – это два луча, один из которых целиком лежит на отрицательной полуоси Ox (поскольку, согласно теореме Виета, произведение корней нашего квадратного трехчлена отрицательно), а потому его можно не рассматривать. По формуле корней квадратного уравнения получаем $x \geq -2a + 2\sqrt{a^2 + 16}$. Учитывая $x = b + c$, имеем $2a + b + c \geq 2\sqrt{a^2 + 16} \geq 2\sqrt{3^2 + 16} = 10$. Равенство достигается при $a = 3, b = c = 2$.

Task 4.

1. Сколько существует различных (не равных друг другу) треугольников, вершины каждого из которых совпадают с вершинами некоторого правильного 59-угольника?

Answer: 290

2. Сколько существует различных (не равных друг другу) треугольников, вершины каждого из которых совпадают с вершинами некоторого правильного 47-угольника?

Answer: 184

3. Сколько существует различных (не равных друг другу) треугольников, вершины каждого из которых совпадают с вершинами некоторого правильного 73-угольника?

Answer: 444

4. Сколько существует различных (не равных друг другу) треугольников, вершины каждого из которых совпадают с вершинами некоторого правильного 65-угольника?

Answer: 352

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

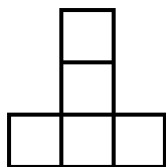
Пусть всего существует N различных треугольников с вершинами в вершинах правильного 59-угольника, причём из них N_1 правильных, N_2 равнобедренных (но не равносторонних) и N_3 неравнобедренных. Каждый правильный треугольник равен одному треугольнику с фиксированной вершиной A , равнобедренный (но не правильный) – трём треугольникам с вершиной A , а неравнобедренный – шести.

Всего имеется $\frac{1}{2}(59 - 1)(59 - 2) = 1653$ треугольников с вершиной A , откуда $N_1 + 3N_2 + 6N_3 = 1653$. Ясно, что $N_1 = 0$ (т.к. 59 не кратно 3) и $N_2 = \frac{1}{2}(59 - 1) = 29$, откуда

$$0 + 3 \cdot 29 + 6 \cdot N_3 = 1653 \implies N_3 = 261$$

Наконец, $N = N_1 + N_2 + N_3 = 0 + 29 + 261 = 290$.

Task 5. Дана квадратная таблица $n \times n$ ($n \geq 3$), все клетки которого изначально белые. Разрешается поменять цвет клетки (с белого на черный и с черного на белый) в фигуре в форме буквы «Т» (см. рисунок), которая может быть повернута на 90° , 180° или 270° . Докажите, что таблицу можно перекрасить так, чтобы все клетки стали черными, тогда и только тогда, когда n делится или на 2, или на 3.

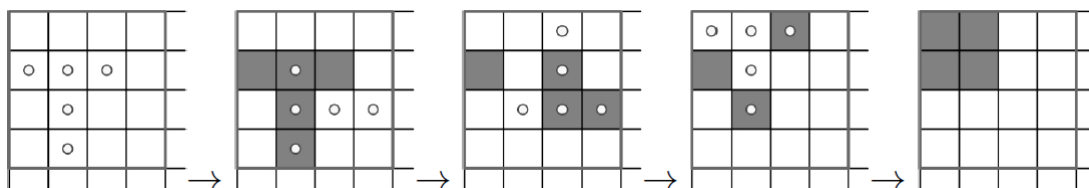


Решение (RUS). Пусть n не делится ни на 2, ни на 3. Пронумеруем столбцы числами $0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$. Обозначим через a_i ($i = 0, 1, 2$) количество черных клеток в столбцах с номером i . Заметим, что каждое перекрашивание меняет четность чисел a_0, a_1, a_2 . При этом, поскольку в начале $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, четности всех чисел a_i в каждый момент времени одинаковы – значит, в каждый момент времени числа a_0 и a_2 имеют одинаковую четность.

Предположим, что мы смогли перекрасить всю табличку, и посмотрим на четности чисел a_0 и a_2 . Поскольку n не делится на 3, в таблице столбцов с номером 0 на один больше, чем столбцов с номером 2, а значит, в конечный момент времени количество клеток в столбцах с номером 0 на n больше, чем количество клеток в столбцах с номером 2, т.е. $a_0 - a_2 = n$. Но n нечетно, поэтому числа a_0 и a_2 должны быть разной четности – противоречие. Таким образом, перекрасить всю таблицу в черный цвет невозможно.

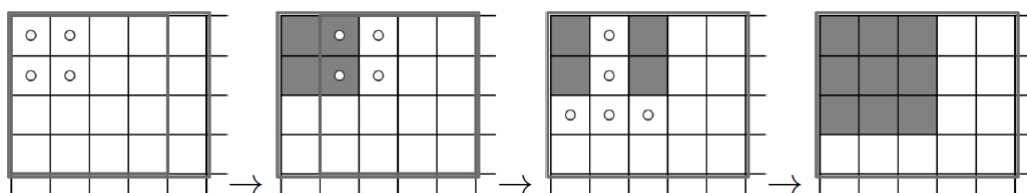
Докажем, что если n делится на 2 или на 3, то покраска возможна.

Если n делится на 2, можно действовать так ($n \geq 4$, поэтому на доске хватит места для совершения указанных операций):



Таким образом, закрашивая последовательно квадраты 2×2 , мы в конечном счете закрасим весь квадрат $n \times n$.

Если n делится на 3, разобьем таблицу на квадраты 3×3 и будем перекрашивать их следующим образом:



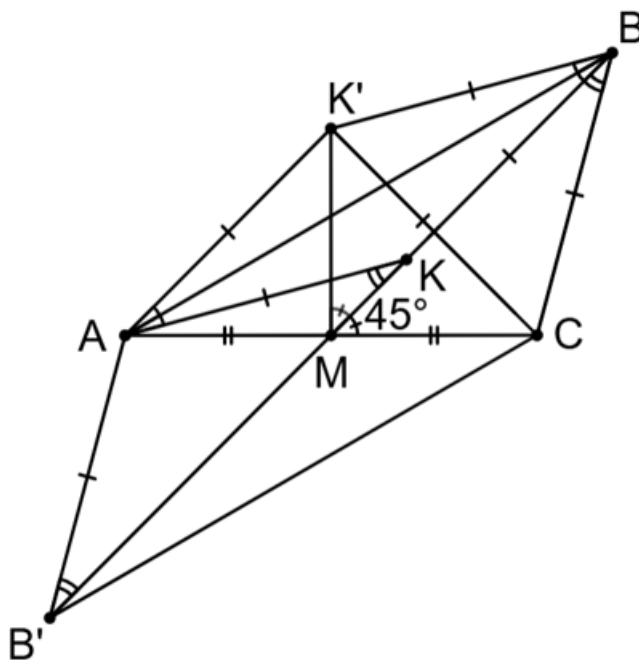
Критерии оценивания:

- доказано, что требуемое не выполняется для $n = 3$: +1 первичный балл;
- доказано, что требуемое не выполняется для n , не кратных 2 или 3: +2 первичных балла;
- показано, как перекрасить таблицу для четного n : +1 первичный балл;
- показано, как перекрасить таблицу для n , кратного 3: +1 первичный балл.

Task 6. На медиане BM треугольника ABC нашлась такая точка K , что $AK = BK = BC$. Также известно, что $\angle BMC = 45^\circ$. Докажите, что точка K лежит на биссектрисе угла BAC .

Решение (RUS). Треугольник ABK равнобедренный, пусть $\angle BAK = \angle ABK = \alpha$. Построим точку B' , симметричную B относительно точки M , и точку K' , симметричную K относительно прямой AB . Так как диагонали четырёхугольника $ABCB'$ точкой пересечения делятся пополам ($AM = CM$ по условию и $BM = B'M$ по построению), он является параллелограммом. Следовательно, $AK = BC = AB'$, откуда $\angle KBC = \angle KB'A = \angle B'KA = \angle BAK + \angle ABK = 2\alpha$. Следовательно, $\angle KBK' = 2\angle KBA = 2\alpha = \angle KBC$. Учитывая $BK' = BK = BC$, получаем, что точки C и K' симметричны относительно KB , то есть $BCMK'$ – дельтоид. Но тогда $\angle K'MC = \angle KMK' + \angle KMC = 2\angle BMC = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$, то есть MK' – серединный перпендикуляр к AC , т.е. $AK' = CK'$. Значит, $BK' = BK = BC = AK = AK' = CK'$, то есть треугольник BCK' – равносторонний. Значит, $\angle CBK' = 2\angle CBK = 2 \cdot 2\alpha = 4\alpha = 60^\circ$, откуда $\alpha = 15^\circ$. Тогда $\angle CAK = \angle MAK = \angle KMC - \angle AKM = 45^\circ - 2\alpha = 15^\circ$ и $\angle BAK = \alpha = 15^\circ$, то есть $\angle BAK = \angle CAK$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Другое решение можно получить, продлив CK до пересечения с AB в точке D и применив теоремы синусов для пар треугольников AKM, MBC и ADK, DCB , что позволит доказать равенства $\angle DAC = \angle DCA$ и $\angle AKD = \angle DBC = 3\alpha$, откуда будет следовать требуемое. В этом решении величина угла α не находится, однако, в задаче это и не требуется. Также возможны решения с применением обратного хода.



Критерии оценивания:

- есть значимое продвижения в решении – 2 первичных балла;
- доказательство содержит только незначительную ошибку – 4 первичных балла;
- полностью верное доказательство – 5 первичных баллов.