

11 degree

Task 1.

1. Дан набор цифр: 0, 1, 2, 2, 7, 0, 6, 6, 4, 8. Разрешается удалить одну из них, а из остальных составить десятичную запись 9-значного числа, кратного 75. Сколько различных чисел можно получить таким образом? Число не может начинаться с цифры «0».

Answer: 2520

2. Дан набор цифр: 0, 0, 1, 1, 1, 2, 5, 6, 7, 8. Разрешается удалить одну из них, а из остальных составить десятичную запись 9-значного числа, кратного 60. Сколько различных чисел можно получить таким образом? Число не может начинаться с цифры «0».

Answer: 12000

3. Дан набор цифр: 0, 0, 1, 2, 5, 6, 7, 7, 8, 9. Разрешается удалить одну из них, а из остальных составить десятичную запись 9-значного числа, кратного 225. Сколько различных чисел можно получить таким образом? Число не может начинаться с цифры «0».

Answer: 16380

4. Дан набор цифр: 0, 1, 1, 1, 2, 2, 5, 6, 9, 9. Разрешается удалить одну из них, а из остальных составить десятичную запись 9-значного числа, кратного 180. Сколько различных чисел можно получить таким образом? Число не может начинаться с цифры «0».

Answer: 1260

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Чтобы число делилось на 75, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 25. Чтобы полученное число делилось на 25, оно должно оканчиваться на 00, 25, 50 или 75, но цифры 5 в наборе нет, поэтому требуемое число оканчивается на 00, и цифру 0 удалять нельзя. Чтобы число делилось на 3, требуется, чтобы сумма его цифр делилась на 3. Сумма цифр приведенного набора равна $0 + 1 + 2 + 2 + 7 + 0 + 6 + 6 + 4 + 8 = 36$ – значит, чтобы сумма цифр требуемого числа делилась на 3. Итак, можно удалить только цифру 6.

Удалив цифру 6, мы получим число вида $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_700}$, где $a_1, \dots, a_7$ – цифры 1, 2, 2, 7, 6, 4, 8 в некотором порядке, и есть $\frac{7!}{2!} = 2520$ способов переставить их всевозможными способами.

Task 2.

1. Для некоторых вещественных a и b решения

$$a \leq x^2 + 2x - 3 \leq b,$$

отмеченные на координатной оси, образуют два непересекающихся отрезка суммарной длины 10. Найдите значение величины $\sqrt{4+b} + \sqrt{4+a}$ при $b - a = 40$, при необходимости округлив его до тысячных.

Given real numbers a and b . All the solutions of the inequalities

$$a \leq x^2 + 2x - 3 \leq b$$

form two non-intersecting segments (on the coordinate axis) of total length 10. Find the value of $\sqrt{4+b} + \sqrt{4+a}$ while $b - a = 40$. Round your answer to 3 decimal places if necessary.

Answer: 8

2. Для некоторых вещественных a и b решения

$$a \leq x^2 + 2x - 3 \leq b,$$

отмеченные на координатной оси, образуют два непересекающихся отрезка суммарной длины 5. Найдите значение величины $\sqrt{4+b} + \sqrt{4+a}$ при $b - a = 40$, при необходимости округлив его до тысячных.

Answer: 16

3. Для некоторых вещественных a и b решения

$$a \leq x^2 - 5x + 6 \leq b,$$

отмеченные на координатной оси, образуют два непересекающихся отрезка суммарной длины 16. Найдите значение величины $\sqrt{1+4b} + \sqrt{1+4a}$ при $b - a = 40$, при необходимости округлив его до тысячных.

Answer: 10

4. Для некоторых вещественных a и b решения

$$a \leq x^2 - 5x + 6 \leq b,$$

отмеченные на координатной оси, образуют два непересекающихся отрезка суммарной длины 8. Найдите значение величины $\sqrt{1+4b} + \sqrt{1+4a}$ при $b - a = 40$, при необходимости округлив его до тысячных.

Answer: 20

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Пусть равенство $a = x^2 + 2x - 3$ выполняется для точек l_a, r_a ($l_a \leq r_a$). Если равенство не достигается, т.е. это квадратное уравнение не имеет корней, то в условиях задачи не могло получиться двух отрезков решений. Аналогично, должны существовать корни $l_b \leq r_b$ для равенства $x^2 + 2x - 3 = b$. Тогда в силу $a < b$ получаем, что $[l_a, r_a] \subset [l_b, r_b]$ и $10 = (r_b - l_b) - (r_a - l_a)$. Эта величина вычисляется, например, по формуле корней квадратного уравнения, и равна

$$10 = \sqrt{(1 - (-3))^2 + 4b} - \sqrt{(1 - (-3))^2 + 4a} = 2 \cdot (\sqrt{4+b} - \sqrt{4+a}) = \frac{2(b-a)}{\sqrt{4+b} + \sqrt{4+a}},$$

что приводит к $\sqrt{4+b} + \sqrt{4+a} = 2(b-a)/10 = 80/10 = 8$.

Task 3.

1. Числа $1, 2, 3, \dots, 36$ выписали по кругу в указанном порядке по часовой стрелке. Каждую секунду разрешается поменять местами два соседних числа. За какое наименьшее количество секунд можно добиться того, что все числа будут расположены в обратном порядке, т.е. $1, 2, 3, \dots, 36$ против часовой стрелки?

Answer: 306

2. Числа $1, 2, 3, \dots, 60$ выписали по кругу в указанном порядке по часовой стрелке. Каждую секунду разрешается поменять местами два соседних числа. За какое наименьшее количество секунд можно добиться того, что все числа будут расположены в обратном порядке, т.е. $1, 2, 3, \dots, 60$ против часовой стрелки?

Answer: 870

3. Числа $1, 2, 3, \dots, 24$ выписали по кругу в указанном порядке по часовой стрелке. Каждую секунду разрешается поменять местами два соседних числа. За какое наименьшее количество секунд можно добиться того, что все числа будут расположены в обратном порядке, т.е. $1, 2, 3, \dots, 24$ против часовой стрелки?

Answer: 132

4. Числа $1, 2, 3, \dots, 40$ выписали по кругу в указанном порядке по часовой стрелке. Каждую секунду разрешается поменять местами два соседних числа. За какое наименьшее количество секунд можно добиться того, что все числа будут расположены в обратном порядке, т.е. $1, 2, 3, \dots, 40$ против часовой стрелки?

Answer: 380

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Будем считать, что числа расположены в вершинах правильного n -угольника, а требуемое минимальное число перестановок обозначим за $f(n)$. Чтобы поменять местами числа, расположенные друг от друга «на расстоянии» k сторон нашего многоугольника (считаем $k \leq n/2$, иначе будем переставлять вдоль другой дуги окружности, описанной около n -угольника), требуется не менее $[(k-1)/2]$ секунд ($[t]$ – целая часть числа t), т.е. $f(n) \geq f(n-1) + [(n-1)/2]$ – значит,

$$f(2k) \geq 1 + [3/2] + [5/2] + \dots + [(2k-1)/2] = 2(1 + 2 + \dots + (k-1)) = k^2 - k$$

$$f(2k+1) \geq f(2k) + [2k/2] = k^2$$

На то, чтобы поменять порядок следования чисел $1, 2, \dots, k$ на противоположный, будем последовательно переставлять 1 и 2, 1 и 3, ... 1 и k , затем 2 и 3, 2 и 4, ..., 2 и k и т.д. – потребуется $(k-1) + (k+2) + \dots + 1 = (k^2 - k)/2$ секунд. Для того, чтобы переставить остальные $n - k$ чисел, потребуется еще $(n-k)(n-k-1)/2$ секунд – итого $(n^2 - 2n)/4$ секунд для четного n .

Task 4.

1. Найдите наименьшее целое положительное n , при котором $4^{941} - 4^{212}$ не кратно 3^n .

Find the smallest positive integer n such that $4^{941} - 4^{212}$ is not a multiple of 3^n .

Answer: 8

2. Найдите наименьшее целое положительное n , при котором $4^{456} - 4^{213}$ не кратно 3^n .

Answer: 7

3. Найдите наименьшее целое положительное n , при котором $4^{171} - 4^{90}$ не кратно 3^n .

Answer: 6

4. Найдите наименьшее целое положительное n , при котором $4^{850} - 4^{121}$ не кратно 3^n .

Answer: 8

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Пусть a – наибольшее целое число, для которого $4^{941} - 4^{212} = 4^{212}(4^{729} - 1)$ кратно 3^a , тогда искомое $n = a + 1$. Очевидно, 4^{212} не кратно 3, поэтому $4^{729} - 1 = 4^{3^6} - 1$ кратно 3^a . Докажем по индукции следующее утверждение: наименьшее целое положительное x , для которого $4^x - 1$ кратно 3^{a+1} , равно 3^a .

База индукции ($a = 1$): очевидно, $4^{3^1} - 1 = 63$ кратно $3^2 = 9$, при этом $4^1 - 1 = 3$ и $4^2 - 1 = 15$ не кратны 9.

Индукционная гипотеза: пусть $4^x - 1$ кратно 3^{a+1} при $x = 3^a$, при этом для всех меньших x это не выполнено.

Шаг индукции: требуется доказать, что $4^{3^x} - 1$ кратно 3^{a+2} , но для всех целых чисел, меньших $3x$, это не выполнено.

$$4^{3^x} - 1 = (4^x - 1)(4^{2x} + 4^x + 1)$$

Первый сомножитель кратен 3^{a+1} (но не 3^{a+2}) по предположению индукции. Рассмотрим второй сомножитель: $4^{2x} + 4^x + 1 \equiv 1^2 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod{3^{a+1}}$ по предположению индукции, т.е. $4^{3^x} - 1$ кратно $3 \cdot 3^{a+1} = 3^{a+2}$. Докажем, что для всех целых $b < 3x$ число $4^b - 1$ не кратно 3^{a+2} : пусть $4^b - 1$ кратно 3^{a+2} , тогда $b = 3^a \cdot c + r$ для некоторого целого $r \in [0; 3^a)$ и целого $c \in \{0, 1, 2\}$. Имеем $4^b \equiv 4^r \pmod{3^{a+1}}$, т.е. $r = 0$. Ясно, что случаи $c = 0$ и $c = 1$ противоречат индукционной гипотезе, а для $c = 2$ имеем $4^{2 \cdot 3^a} - 1 = (4^{3^a} - 1)(4^{3^a} + 1)$ – первый множитель не кратен 3^{a+2} , а второй не кратен 3 – противоречие с предположением, что завершает доказательство.

Task 5. По кругу записаны 2^n неотрицательных целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2^n}$. Далее все числа a_i одновременно заменяются на числа $|a_{i+1} - a_i|$, где $a_{2^n+1} = a_1$. Докажите, что в результате этого процесса все числа рано или поздно станут нулями.

2^n non-negative integers $a_1, a_2, \dots, a_{2^n}$ are written in a circle. Then all the numbers a_i are simultaneously replaced by the numbers $|a_{i+1} - a_i|$, where $a_{2^n+1} = a_1$. Prove that as a result of this process, all the numbers sooner or later become zeros.

Решение (RUS). Заметим, что на каждом шаге максимальное число в наборе не увеличивается, т.е. если в некоторый момент времени максимальное число станет равно 0, то и все остальные числа тоже будут равны 0. Предположим, что максимальное число в нашем наборе в результате операций перестало меняться и стало равно $m > 0$. Для удобства заменим числа m на числа 1, и будем рассматривать все числа как остатки по модулю 2. Тогда, если мы в какой-то момент получим только нулевые остатки, это будет означать, что все числа обратились в нули.

Докажем индукцией по k , что после k -го шага для всех $i = 1, 2, 3, \dots, 2^n$ будет выполнено

$$a_i^{(k)} \equiv \sum_{j=0}^k C_k^j \cdot a_{(i+j)} \pmod{2^n} \pmod{2}$$

База индукции ($k = 1$): $a_i^{(1)} \equiv |a_{i+1} - a_i| \equiv a_i + a_{i+1} \pmod{2}$.

Индукционная гипотеза: пусть утверждение выполнено для $1, 2, \dots, k$.

Шаг индукции:

$$\begin{aligned} a_i^{(k+1)} &\equiv |a_{i+1}^{(k)} - a_i^{(k)}| \equiv a_{i+1}^{(k)} + a_i^{(k)} \equiv \\ &\sum_{j=0}^k C_k^j \cdot a_{(i+j)} \pmod{2^n} + \sum_{j=0}^k C_k^j \cdot a_{(i+j+1)} \pmod{2^n} \equiv \sum_{j=0}^k C_k^j \cdot a_{(i+j)} \pmod{2^n} + \sum_{j=1}^{k+1} C_k^{j-1} \cdot a_{(i+j)} \pmod{2^n} \equiv \\ &\sum_{j=0}^{k+1} (C_k^j + C_k^{j-1}) \cdot a_{(i+j)} \pmod{2^n} \equiv \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j \cdot a_{(i+j)} \pmod{2^n} \pmod{2} \end{aligned}$$

Мы использовали известное тождество $C_k^j + C_k^{j-1} = C_{k+1}^j$. Индукция завершена.

Для $k = 2^n$ биномиальные коэффициенты C_k^j четны для $j = 1, 2, \dots, k-1$, при этом $C_k^0 = C_k^k = 1$. После 2^n шагов имеем

$$a_i^{(2^n)} \equiv a_i^{(2^n-1)} + a_{(i+2^n)}^{(2^n-1)} \pmod{2^n} \equiv 2 \cdot a_i^{(2^n-1)} \equiv 0 \pmod{2},$$

т.е. не более чем через 2^n шагов все исходные числа обратятся в нули, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания:

- отмечено, что максимальное число в последовательности не увеличивается, и что все числа через некоторое число шагов становятся четными, либо другие полезные наблюдения – 1 первичный балл;
- доказано, что все числа через некоторое число шагов становятся четными – 3 первичных балла;
- полное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Task 6.

а) Лев решал домашнее задание по стереометрии. В задаче требовалось найти геометрическое место точек (ГМТ) трёхгранного угла $Sabc$, равноудалённых от его рёбер. Лев написал: «Отметим на рёбрах a, b, c точки A, B, C соответственно на равных расстояниях от вершины угла (S), тогда искомое ГМТ – луч SO , где O – центр описанной окружности треугольника ABC ». Прав ли Лев?

б) В следующей задаче требовалось найти геометрическое место точек (ГМТ) трёхгранного угла $Sabc$, равноудалённых от его граней. Лев написал: «Отметим на рёбрах a, b, c точки A, B, C соответственно на равных расстояниях от вершины, тогда искомое ГМТ – луч SI , где I – центр вписанной окружности треугольника ABC ». Прав ли Лев?

Answer: а) yes; б) no.

Решение (RUS). а) Для точки S требуемое условие равноудалённости от рёбер очевидно. Для любой другой точки X трёхгранного угла оно равносильно тому, что луч SX образует равные углы с рёбрами трёхгранного угла (в силу равенства соответствующих прямоугольных треугольников SXX_a, SXX_b, SXX_c по общей гипотенузе и равным катетам, где X_a, X_b, X_c – проекции точки X на прямые S_a, S_b, S_c , соответственно). По построению $SA = SB = SC$, поэтому и ортогональная проекция точки S на плоскость ABC будет равноудалена от точек A, B, C , то есть будет являться центром описанной окружности треугольника ABC – точкой O . Таким образом, треугольники SOA, SOB, SOC будут прямоугольными с общим катетом SO и равными гипотенузами $SA = SB = SC$. Тогда равны и их острые углы при вершине S – а это и есть углы, образованные лучом SO с рёбрами трёхгранного угла $Sabc$. А в силу существования гомотетии с центром S , переводящей точку O в любую (отличную от S) точку луча SO , любая точка луча SO будет обладать тем же свойством.

Таким образом, все точки луча SO действительно равноудалены от рёбер трёхгранного угла $Sabc$. Докажем утверждение в обратную сторону: любая точка X' , равноудалённая от рёбер трёхгранного угла $Sabc$, будет принадлежать лучу SO . Проведём плоскость, перпендикулярную лучу SX' , через точку X' , и пусть она пересечёт рёбра в точках A', B', C' . Из равенства прямоугольных треугольников $SX'A', SX'B', SX'C'$ по острому углу при вершине S и общему катету SX' следует $SA' = SB' = SC'$ и $X'A' = X'B' = X'C'$, то есть X' – центр описанной окружности треугольника $A'B'C'$, получающегося из треугольника ABC гомотетией с центром S , а потому является образом точки O при соответствующей гомотетии и действительно лежит на луче SO .

б) Покажем, что построенная таким образом точка I в общем виде (на самом деле – для всех трёхгранных углов, кроме правильных) не обладает свойством равноудалённости от граней трёхгранного угла $Sabc$ – этого будет достаточно, чтобы утверждать, что Лев неправ. По построению точка I равноудалена от сторон треугольника ABC , то есть $IA_1 = IB_1 = IC_1$, где A_1, B_1, C_1 – точки касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами BC, CA, AB соответственно (они же – проекции I на стороны треугольника). Если действительно $II_A = II_B = II_C$ (где I_A, I_B, I_C – проекции I на плоскости граней Sbc, Sca, Sab , соответственно), то будет выполняться равенство прямоугольных треугольников $IA_1I_A, IB_1I_B, IC_1I_C$ (по гипотенузе и катету). Тогда должны быть равны углы, образованные прямыми IA_1, IB_1, IC_1 с соответствующими гранями трёхгранного угла. Перенеся параллельно эти прямые, получим, что должны быть равны углы, образованные серединными перпендикулярами к сторонам треугольника ABC с соответствующими гранями $Sabc$. Но эти углы равны плоским углам SA_0O, SB_0O, SC_0O , где A_0, B_0, C_0 – середины сторон BC, CA, AB , а O – центр описанной окружности треугольника ABC (то есть проекция S на плоскость ABC). Поскольку треугольники SOA_0, SOB_0, SOC_0 – прямоугольные с общим катетом SO , равенство этих углов означает равенство данных треугольников, что, в свою очередь, означает равенство отрезков SA_0, SB_0, SC_0 . Но эти отрезки – высоты, проведённые к основаниям в равнобедренных треугольниках SBC, SCA, SAB соответственно ($SA = SB = SC$), а потому они равны тогда и только тогда, когда равны сами эти треугольники, то есть все плоские углы исходного трёхгранного угла $Sabc$. Итак, в общем виде соответствующие равенства не выполняются, поэтому Лев определил требуемое ГМТ неверно.

Критерии оценивания:

Для пункта а):

- равноудаленность доказана для точки O – 1 первичный балл;
- равноудаленность доказана для всех точек луча SO – 2 первичных балла;

Для пункта б):

- есть верный ответ и значительные продвижения в доказательстве пункта б) – 1 первичный балл;
- есть верный ответ и доказательство пункта б), содержащее лишь незначительные недочеты – 2 первичных балла;
- верный ответ и полностью верное доказательство пункта б) – 3 первичных балла.